

Próbáljuk most ezen eredmény segítségével állapítani meg néhány függvényről, hogy konvex-e, vagy konkáv. Legyen pl.  $f(x) = x^2$  és képezzük erre az (1') egyenlőtlenség két oldalának különbségét. Mivel  $q_1 + q_2 = 1$

$$(3) \quad \begin{aligned} q_1 x_1^2 + q_2 x_2^2 - (q_1 x_1 + q_2 x_2)^2 &= q_1(1 - q_1)x_1^2 - 2q_1 q_2 x_1 x_2 + \\ &+ q_2(1 - q_2)x_2^2 = q_1 q_2(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = \\ &= q_1 q_2(x_1 - x_2)^2 > 0, \end{aligned}$$

feltéve, hogy  $q_1 > 0$ ,  $q_2 > 0$  és  $x_1 \neq x_2$ . Az  $x^2$  függvényről tehát ezúton is megmutattuk, hogy konvex.

Vizsgáljuk most a  $\sqrt{x}$  függvényt. Alakítsuk át a  $q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} - \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2}$  kifejezést. Ezzel a gyökjelek miatt ebben az alakban nem tudunk mit kezdeni, de csökkenthetjük a kifejezésben a gyökjelek számát, ha szorzunk és osztunk  $q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} + \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2}$ -vel. (Részben gyöktelenítjük a kifejezést.) Ekkor a számláló így alakítható át:

$$\begin{aligned} &(q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} - \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2})(q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2} + \sqrt{q_1 x_1 + q_2 x_2}) = \\ &= (q_1\sqrt{x_1} + q_2\sqrt{x_2})^2 - (q_1 x_1 + q_2 x_2) = q_1(q_1 - 1)x_1 + \\ &+ 2q_1 q_2 \sqrt{x_1 x_2} + q_2(q_2 - 1)x_2 = -q_1 q_2(x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2) = \\ &= -q_1 q_2(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2. \end{aligned}$$

Ez mindig negatív, a nevező viszont mindig pozitív, tehát a kifejezés most mindig negatív lesz. A függvény tehát konkáv.

Vizsgáljuk az  $x^3$  függvényt hasonló módon:

$$\begin{aligned} q_1 x_1^3 + q_2 x_2^3 - (q_1 x_1 + q_2 x_2)^3 &= q_1(1 - q_1)(1 + q_1)x_1^3 - \\ &- 3q_1^2 q_2 x_1^2 x_2 - 3q_1 q_2^2 x_1 x_2^2 + q_2(1 - q_2)(1 + q_2)x_2^3 = \\ &= q_1 q_2 [(2q_1 + q_2)x_1^3 - 3q_1 x_1^2 x_2 - 3q_2 x_1 x_2^2 + (q_1 + 2q_2)x_2^3] = \\ &= q_1 q_2 [q_1(2x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + x_2^3) + q_2(x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + 2x_2^3)]. \end{aligned}$$

Erről már nem látszik olyan könnyen, hogy milyen az előjele. Vizsgáljuk az első zárójelben levő kifejezést és próbáljuk az első tagot egy teljes négyzet kifejezésbe foglalni, mely még  $x_1$ -gyel van szorozva. (Így tudjuk a harmadfokú tagot figyelembe venni.)

$$\begin{aligned} 2x_1^3 - 3x_1^2 x_2 + x_2^3 &= 2x_1(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) + x_1^2 x_2 - \\ &- 2x_1 x_2^2 + x_2^3 = 2x_1(x_1 - x_2)^2 + x_2(x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = \\ &= (2x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Hasonló érvényes a második kifejezésre is, csak ott  $x_1$ -et és  $x_2$ -t fel kell cserélni s így végül a fenti kifejezés így alakítható át:

$$q_1 q_2 (x_1 - x_2)^2 [q_1(2x_1 + x_2) + q_2(x_1 + 2x_2)].$$

Mivel  $q_1$  és  $q_2$  pozitív és  $x_1 \neq x_2$ , ez biztosan pozitív, ha  $x_1$  és  $x_2$  pozitív, viszont biztosan negatív, ha  $x_1$  is,  $x_2$  is negatív. Az eredmény megegyezik azzal, amit az előző közleményben szemlélet alapján állapítottunk meg. A számolás kényelmetlenné válása viszont azt mutatja, hogy találtunk ugyan egy megbízható módszert a domborúság vizsgálására, de ez elég bonyolult módszer. Alkalmazzuk azért még egy egyszerű esetben: az  $\frac{1}{x}$  függvényre.

$$\frac{q_1}{x_1} + \frac{q_2}{x_2} - \frac{1}{q_1 x_1 + q_2 x_2} = \frac{(q_1 x_2 + q_2 x_1)(q_1 x_1 + q_2 x_2) - x_1 x_2}{x_1 x_2 (q_1 x_1 + q_2 x_2)}.$$

Alakítsuk át a számlálót. Itt egy 1-es helyébe lesz célszerű majd  $q_1 + q_2$ -t írni:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 (x_1^2 + x_2^2) + (q_1^2 + q_2^2 - 1)x_1 x_2 &= q_1 q_2 (x_1^2 + x_2^2) + \\ &+ [(q_1^2 - q_1) + (q_2^2 - q_2)] x_1 x_2 = q_1 q_2 (x_1^2 + x_2^2) - \\ &- [q_1(1 - q_1) + q_2(1 - q_2)] x_1 x_2 = q_1 q_2 (x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2) = \\ &= q_1 q_2 (x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

A számláló tehát ismét pozitív, a nevező biztosan pozitív, ha  $x_1$  és  $x_2$  is pozitív és biztosan negatív, ha  $x_1$  is,  $x_2$  is negatív. A függvény tehát pozitív értékekre konvex, negatív értékekre konkáv.