Írjuk fel pl. az $\dfrac{1}{x}$ görbére, hogy minden olyan húr középpontja, melynek végpontjai pozitív abszcisszájúak, a görbe fölött van. Legyen a és b pozitív

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} \geq \frac{1}{\frac{a+b}{2}}, \quad \text{azaz} \quad \frac{a+b}{2} \geq \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

A geometriai szemlélet tehát közvetlenül adta, hogy a számtani közép nagyobb a harmonikusnál. Sok egyéb érdekes és fontos egyenlőtlenséget írhatnánk még fel megállapításaink alapján, a baj csak az, hogy nem építünk biztos alapokra, mikor szemléletünkre bízzuk annak eldöntését, hogy egy függvény hol konvex, hol konkáv.

Eldönthetjük ezt a szemlélet igénybevétele nélkül is, éppen azt a tulajdonságot fejezve ki az algebra nyelvén, ami a konvex görbéket jellemzi, hogy a húr mindig a görbe fölött van. Legyen x az $(x_1,\, x_2)$ szakasz egy belső pontja az X-tengelyen. Először is x-et szeretnénk x_1 és x_2 segítségével írni fel.

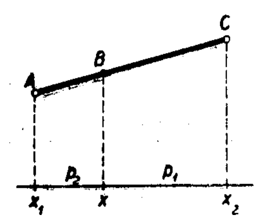
$$x = x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}(x_2-x_1) = \frac{x_2-x}{x_2-x_1}x_1 + \frac{x-x_1}{x_2-x_1}x_2.$$

$x_2-x=p_1$, $x-x_1=p_2$ jelölést használva $x_2-x_1=p_1+p_2$ x a távolságot $p_2 : p_1$ arányban osztó pont. Abszcisszájára:

$$x = \frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}.$$

Ha x az $(x_1,\, x_1)$ szakasz belső pontja (és csakis ekkor) p_1 és p_2 pozitív. Ha $\dfrac{p_1}{p_1+p_2}$ és $\dfrac{p_2}{p_1+p_2}$ helyett q_1 és q_2-t írunk, akkor

$$x = q_1x_1+q_2x_2, \quad \text{ahol} \quad q_1,\ q_2 \quad \text{pozitív és} \quad q_1+q_2=1.$$



Írjuk fel most az x_1 és x_2 abszcisszájú pontok közti húr x abszcisszájú B pontjának ordinátáját. (Feltesszük a továbbiakban mindig, hogy $x_1 \neq x_2$.) Jelöljük ezt y-nal. Az ábráról látható, hogy

$$\frac{y-f(x_1)}{f(x_2)-y} = \frac{AB}{BC} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{q_2}{q_1}.$$

Innen egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

$$y = \frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)}{p_1+p_2} = \frac{q_1f(x_1)+q_2f(x_2)}{q_1+q_2} = q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

A mondott geometriai tulajdonságot tehát így írhatjuk algebrai formában: $f(x)$ akkor és csakis akkor konvex, ha minden x_1, x_2 számhoz és bármely 0-tól különböző pozitív p_1 és p_2 számokra (úgynevezett súlyokra)

(1) $$f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}\right) < \frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)}{p_1+p_2}.$$

Írhatjuk az egyenlőtlenséget így is: bármely pozitív q_1 és q_2 súlyokra, melyekre $q_1+q_2=1$.

(1′) $$f(q_1x_1+q_2x_2) < q_1f(x_1)+q_2f(x_2).$$

A nyert egyenlőtlenséget nevezik: *súlyozott Jensen–féle egyenlőtlenségnek.* Ez fejezi ki tehát azt, hogy a függvény konvex. Ha $q_1=q_2=\dfrac{1}{2}$, akkor kapjuk a *szimmetrikus Jensen-egyenlőtlenséget.*

(2) $$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$