Ha a szám 12-es számrendszerben: $A = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ alakú, ahol az a_i jegyek a $0,\ 1,\ 2 \dots 11$ számok közül valók, akkor e számot részletesebben így írhatjuk:

$$A = a_0 + a_1 12 + a_2 12^2 + \dots + a_{n+1} 12^{n-1} + a_n 12^n$$

a) A számjegyek összegét különválasztva:

$$\begin{gathered} A = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 = a_0 + a_1 12 + a_2 12^2 + \dots + \\ + a_{n-1} 12^{n-1} + a_n 12^n = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n) + \\ + \big[a_1(12-1) + a_2(12^2-1) + \dots + \\ + a_{n-1}(12^{n-1}-1) + a_n(12_n - 1)\big]\,. \end{gathered}$$

De tudjuk, hogy $(a^k - b^k)$ mindig osztható $(a-b)$-vel, tehát $(12^k - 1)$ mindig osztható $12 - 1 = 11$-gyel.

Így a szögletes zárójelben álló összeg minden tagja, tehát maga az összeg is osztható 11-gyel. A tehát csak úgy lehet osztható 11-gyel, ha a jobboldalon álló másik tag, vagyis a számjegyek összege osztható 11-gyel. Ebben az esetben azonban mindig osztható is 11-gyel.

b) Vonjuk le a kérdéses különbséget magából a számból:

$$\begin{gathered} (a_0 + a_1 12 + a_2 12^2 + a_3 12^3 + \dots) - [(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - \\ -(a_1 + a_3 + a_5 + \dots)] = a_1(12+1) + a_2(12^2-1) + \\ + a_3(12^3-1) + a_4(12^4+1) + a_5(12^5-1) \dots . \end{gathered}$$

Tudjuk, hogy $(a^{2k} - b^{2k})$ és $(a^{2k-1} - b^{2k-1})$ mindig osztható $(a+b)$-vel, tehát $(12^{2k} - 1)$ és $(12^{2k-1} + 1)$ mindig osztható $12 + 1 = 13$-mal. Így a jobboldalon álló összeg minden tagja osztható 13-mal. Tehát a szám akkor és csakis akkor lehet 13-mal osztható, ha a belőle levont különbség is osztható 13-mal.

c) A kérdéses különbség most a következő alakú lesz:

$$\begin{gathered} \big[(a_0 + a_1 12 + a_2 12^2) + (a_6 + a_7 12^2 + a_8 12^2) + \\ + (a_{12} + a_{13} 12 + a_{14} 12^2) + \dots\big] - \\ - \big[(a_3 + a_4 12 + a_5 12^2) + (a_9 + a_{10} 12 + a_{11} 12^2) + \dots\big] \end{gathered}$$

Vonjuk le ezt a különbséget magából a számból. Az áttekinthetőség kedvéért írjuk előbb a számot a következő alakba:

$$\begin{gathered} a_0 + a_1 12 + a_1 12^2 + a_3 12^3 + \dots + a_n 12^n = (a_0 + a_1 12 + a_2 12^2) + \\ + (a_3 + a_4 12 + a_5 12^2) 12^3 + (a_6 + a_7 12 + a_8 12^2) 12^6 + \\ + (a_3 + a_{10} 12^2) 12^9 + \dots \end{gathered}$$

Most már könnyen felírhatjuk a kivonás eredményét:

$$\begin{gathered} (a_3 + a_4 12 + a_5 12^2)(12^3 + 1) + (a_9 + a_{10} 12 + a_{11} 12^2)(12^9 + 1) + \\ + \dots + (a_6 + a_7 12 + a_8 12^2) \cdot (12^6 - 1) + \\ + (a_{12} + a_{13} 12 + a_{14} 12^3) \cdot (12^{12} - 1) + \dots \end{gathered}$$

A *b)* pontban felhasznált két oszthatósági szabály szerint most már:

$$12^{6k+3} + 1 = (12^3)^{2k+1} + 1 \quad \text{és} \quad 12^{6k} - 1 = (12^3)^{2k} - 1$$

oszthatóak: $12^3 + 1 = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$-cel, tehát a szám és a kérdéses különbség különbsége mindig osztható 7-tel, 13-mal és 19-cel, vagyis maga a szám akkor és csakis akkor osztható velük, ha a kérdéses különbség is osztható 7-tel, 13-mal ill. 19-cel.

d) Ha a számokat kettes csoportokba osztjuk és így képezzük a szóbanforgó különbséget, akkor az előbbihez teljesen hasonló módon végezve a számolást, nyilván azt kapjuk, hogy a szám és a kérdéses különbség különbsége mindig osztható $12^2 + 1 = 145 = 5 \cdot 29$-cel. Ilyen módon tehát az 5-tel és 29-cel való oszthatóságot dönthetjük el.

Kántor Sándor (Debrecen, III. o.)