

Vegyük a felbontandó valódi törtben foglalt legnagyobb törzstörtet és vonjuk ki a törtből  $\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{a_1}{b_1}$ .

A maradékból megint vonjuk le a benne foglalt legnagyobb törzstörtet.  $\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \left(\frac{1}{n_2} + \frac{a_2}{b_2}\right)$ . A 308. feladatból tudjuk, hogy  $a > a_1 > a_2$ . Így, ha az eljárást folytatjuk, végül maga a maradék is törzstört lesz, és így

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}.$$

Még azt lássuk be, hogy a felbontásban szereplő törzstörtek mind különbözőek. Ehhez elég lesz azt belátnunk, hogy mindegyik kisebb az előtte levőnél. Ha  $\frac{1}{n_1}$  az első törzstört, akkor a másodikat úgy kapjuk, hogy vesszük az  $\frac{a}{b} - \frac{1}{n_1}$ -nél kisebb legnagyobb törzstörtet. Azt kellene belátni, hogy ez kisebb mint  $\frac{1}{n_1}$ . Ehhez elég belátni, hogy  $\frac{a}{b} - \frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_1}$ .

De ez igaz, mert  $\frac{a}{b} < \frac{1}{n_1 - 1}$  és így

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_1 - 1} - \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_1(n_1 - 1)} \leq \frac{1}{n}.$$

Ha tehát tovább folytatjuk a felbontást, egyre kisebb törzstörteket kapunk, ezek között tehát nem lehetnek egyenlők.

Ez a felbontás nyilván nem egyértelmű, mert, ha  $\frac{a}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n}$  akkor felhasználva, hogy  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$  egyúttal  $\frac{a}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n + 1} + \frac{1}{a_n(a_n + 1)}$ .