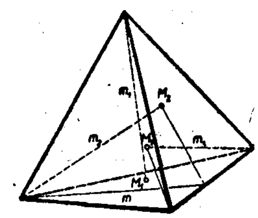
Válasszuk ki a három leghosszabb testmagasságot: m_1, m_2, m_3. Legyen ezek talppontja rendre: M_1, M_2, M_3. Fordítsuk úgy a tetraédert, hogy az alaphoz m_1 magasság tartozzon. Az M_2 és M_3 pontok a tetraéder egy–egy oldallapján vannak. Ezek közül az egyik, pl. az M_2-n átmenő oldallapon fekvő alapélt jelöljük a-val, az alaplap a-hoz tartozó magasságát m-mel, ekkor amm_1 a tetraeder hatszoros köbtartalma.



Kössük össze m és a egyenesek metszéspontját az M_2 ponttal, ezáltal oly derékszögű háromszög keletkezik, melynek átfogója m, egyik befogója m_2, eszerint $m \geq m_2$. Az m_3 magasság az a él egyik végpontjából indul ki. Kössük össze az él másik végpontját is az M_3 ponttal, ezáltal oly derékszögű háromszög keletkezik, melynek átfogója a, egyik befogója m_3, eszerint $a \geq m_3$. E két egyenlőtlenség figyelembevételével

$$amm_1 \geq m_1 m_2 m_3.$$

tehát a tetraéder hatszoros térfogata nagyobb vagy legfeljebb egyenlő a három legnagyobb testmagasság szorzatával.

Az egyenlőség akkor és csakis akkor következik be, ha mind a két derékszög egyenessé fajul, ekkor m egybeesik m_2-vel, a pedig m_3-mal. Ilyen a tetraéder, ha három lapja páronként merőleges egymásra, tehát derékszögű csúcsa van.

Kántor Sándor