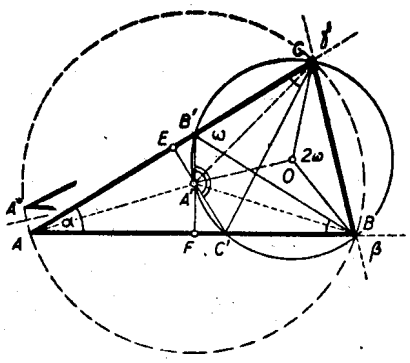
I. megoldás. Jelöljük az AC oldal felezőpontját E-vel, az AB oldal felezőpentját F-fel.



a) Mivel B' rajta van az AB oldal felezőmerőlegesén, azért $AB'B$ háromszög egyenlőszárú, következőleg az A-nál és B-nél egy ívvel jelzett szögek egyenlők. Hasonló okból egyenlő az A-nál megjelölt szög a C-nél egy ívvel megjelölttel is.

A felezőmerőlegesek által bezárt, két ívvel megjelölt szög α-t $180°$-ra egészíti ki, mert szárai α száraira merőlegesek, ugyanígy $180°$-ra egészíti ki α-t a B-nél vagy C-nél egy ívvel megjelölt szög is. Eszerint az $A'B'CC'$ négyszög húrnégyszög, ugyancsak húrnégyszög az $A'B'BC'$ négyszög is, tehát az $A'B'$ és C' pontokon átmenő kör átmegy a C és B ponton is.

b) A kör ϱ sugarát ki tudnánk számítani, ha ismernénk a COB háromszögnek 2ω-val jelölt szögét, mert az egyenlőszárú háromszöget 2ω szögfelezőjével két derékszögű háromszögre bontva

$$\sin\ \omega = \frac{a}{2} : \varrho, \quad \text{innen} \quad \varrho = \frac{a}{2\sin\ \omega}.$$

Ámde a 2ω középponti szöghöz tartozó B' pontnál fekvő kerületi szög az $AB'B$ háromszögnek külső szöge, így $\omega = 2\alpha$. Ennek az összefüggésnek figyelembevételével $\varrho = \dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$.

c)[1] Két görbe akkora szög alatt metszi egymást, amekkorát a metszéspontban meghúzott érintők bezárnak. Kör esetében az érintők szöge helyett vehetjük a metszésponthoz húzott két sugár szögét, mert e szög szárai merőlegesek az érintőkre. Eszerint feladatunk AA' és $A'O$ egyenesek szögét meghatározni. Az $AA'O\sphericalangle$ így tehető össze:

$$AA'O\sphericalangle = AA'B\sphericalangle + BA'O\sphericalangle.$$

Figyelemmel arra, hogy A' pont a háromszög köré írható kör középpontja, $AA'B\sphericalangle = 2\gamma$, mint a γ kerületi szöghöz tartozó középponti szög. Ugyanígy $BA'C\sphericalangle = 2\alpha$, de ennek a szögnek $A'O$ szögfelezője, miután az $A'OB$ háromszög és az $A'OC$ háromszög tükrös helyzetű, az $A'O$ egyenesre vonatkozólag. Eszerint

$$BA'O\sphericalangle = \alpha, \quad \text{továbbá} \quad AA'O\sphericalangle = 2\gamma + \alpha.$$

A két kör szögén azonban azt a szöget értjük, amelyet az érintőknek a másik kört nem metsző félegyenesei zárnak be egymással. Ez most hegyesszög, jelöljük φ-vel,

$$\varphi = 180° - AA'O\sphericalangle = 180° - (2\gamma + \alpha) = \alpha + \beta + \gamma - (2\gamma + \alpha) = \beta - \gamma.$$

Kovács László

Megoldotta: Kántor S.

II. megoldás *az a) és c) pontokra.*

a) Megmutatjuk, hogy az A', B' és C' pontokból a BC távolság egyenlő szög alatt látszik. Ebből következik, hogy az öt ponton át kört lehet rajzolni. A' pontból a CB távolság 2α szög alatt látszik, ez a szög ugyanis középponti szöge az A csúcsnál fekvő α kerületi szögnek. B' pontból BC azon szög alatt látszik, mely az $AB'B$ egyenlőszárú háromszögnek külső szöge, e látószög tehát szintén 2α; C'-ből BC látószöge szintén 2α, mint a $CC'A$ egyenlőszárú háromszög külső szöge.

c) Keressük AA'-nek a CB oldal felező merőlegesével, ($A'O$-val) bezárt szögét. Tükrözzük a háromszöget a kérdéses oldalfelező merőlegesre, A pont tükörképét jelöljük A^*-gal, B tükörképe C, C-é pedig B lesz. A^* rajta van a háromszög köré írható körön, $A^*A'A\sphericalangle$ e körnek középponti szöge (egyúttal a keresett szög kétszerese). Eszerint a keresett szög egyenlő a köré írt kör A^*A ívén álló kerületi szöggel, tehát pl. $A^*CA\sphericalangle$-gel. Ámde

$$A^*CA\sphericalangle = A^*CB\sphericalangle - ACB\sphericalangle = \beta - \gamma.$$

(Az ábrába a háromszög teljes tükrözését nem rajzoltuk bele, csak az A^* pontot).

[1] Az ábra *c)* ponthoz tartozó részét szaggatottan rajzoltuk, a háromszög szögeinek a félreértések elkerülése kedvéért a csúcsszöget jelöltük meg.