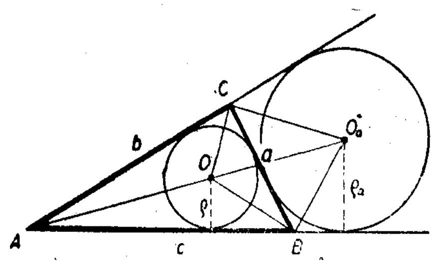
Legyen O az ABC háromszöget belülről érintő és O_a az a oldalhoz írt kör középpontja.



Fejezzük ki ϱ, ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c értékét t segítségével. Az ABC háromszög területe az ABO, BCO és CAO területéből tevődik össze, tehát

$$t = \frac{c\varrho}{2} + \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} = \varrho\frac{a+b+c}{2} = \varrho s,$$

ahol s a háromszög fél kerülete: $s = \dfrac{a+b+c}{2}$. Eszerint $\varrho = \dfrac{t}{s}$.

Kössük össze a háromszöghöz írt körök középpontjait is a háromszög csúcsaival, pl. az O_a pontot. Így ismét három olyan háromszöget nyerünk, melyek kiadják a háromszög területét, ha a BCO háromszögét, mely a BC oldal ***külső partján*** fekszik, a másik két háromszög területének összegéből levonjuk. (BC oldal belső partján értjük az oldallal kettévágott síknak azt a felét, amelyen az ABC háromszög fekszik, a sík másik fele az oldal külső partja.) Eszerint

$$t = t_{ABO_a} - t_{BCO_a} + t_{CAO_a} = \frac{c\varrho_a}{2} - \frac{a\varrho_a}{2} + \frac{b\varrho_a}{2} =$$
$$= \varrho_a\frac{b+c-a}{2} = \varrho_a(s-a).$$

Innen $\varrho_a = \dfrac{t}{s-a}$. Hasonlóan nyerhetjük, hogy $\varrho_b = \dfrac{t}{s-b}$, $\varrho_c = \dfrac{t}{s-c}$, és egyenleteink összeszorzásával

$$\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = \frac{t^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Ámde Heron képlete szerint

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = t^2 \quad \text{és így} \quad \varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c = t^2.$$

Zobor Ervin

Megoldotta: Barabás Gy., Kántor S.