I. megoldás. A tétel bizonyításához egy segédtételt használunk fel, a Bernoulli–féle egyenlőtlenséget: ha $h > -1$ és $n > 1$, akkor

$$(1+h)^n > 1 + nh.$$

Ez sokféleképpen bizonyítható. Mi teljes indukcióval fogjuk igazolni.

$n = 2$-re a tétel igaz, mert

$$(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h.$$

Tegyük fel, hogy n-re igaz, bebizonyítjuk, hogy akkor $(n+1)$-re is igaz.

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) > (1+nh)(1+h) &= \\ = 1 + (n+1)h + nh^2& \\ (1+h)^{n+1} > 1 + (n+1)h,&\end{aligned}$$

amint állítottuk. E segédtétel birtokában tételünket így bizonyítjuk:

$$\begin{gathered} n^n > (n+1)^{n-1} \\ \frac{n^n}{(n+1)^n} > \frac{1}{n+1}, \end{gathered}$$

ebből

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > \frac{1}{n+1}.$$

Elég ez utóbbi egyenlőtlenséget igazolni és ez valóban helyes, t. i. a Bernoulli-féle egyenlőtlenség szerint

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > 1 + n\left(-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}.$$

Megoldotta: Kántor S.

II. megoldás: A bebizonyítandó egyenlőtlenséget így alakítjuk át:

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n-1}} = (n+1)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n > 1.$$

Ezt teljes indukcióval igazoljuk, $n = 2$-re a baloldalon 4/3 áll.

Ha $n = k-1$-re igazoltuk az állítást: $k \cdot \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} > 1$, akkor $n = k$-t téve

$$(k+1)\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k = k\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k-1} > k\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1},$$

ami feltevés szerint nagyobb 1-nél. Ezzel bizonyítottuk állításunkat.

Megoldotta: Zobor E.