I. megoldás. A számláló első tényezőjét osszuk y-nal, a másodikat x-szel, a harmadikat z-vel. Így a bizonyítandó egyenlőtlenség a következőképpen alakul.

$$\left(1+\frac{x+z}{y}\right)\left(1+\frac{y-z}{x}\right)\left(1+\frac{x-y}{z}\right)\geq 3.$$

A feltételből kifolyólag a következő helyettesítés alkalmazható:

$$x=y(1+u),\ z=y(1-v),\ \text{hol } u\geq 0,\ \text{és } 1>v\geq 0.$$

Ebből $\dfrac{x+z}{y}=2+u-v$; $y-z=yv$, így $\dfrac{y-z}{x}=\dfrac{v}{1+u}$ és $x-y=yu$, egyenletből $\dfrac{x-y}{z}=\dfrac{u}{1-v}$.
Így a bizonyítandó egyenlőtlenséget a következő alakra hoztuk:

$$(3+u-v)\left(1+\frac{v}{1+u}\right)\left(1+\frac{u}{1-v}\right)\geq 3.$$

Mivel $v<1$, ha $u\geq 1$,

$$(3+u-v)>3,\quad 1+\frac{v}{1+u}\geq 1\quad\text{és}\quad 1+\frac{u}{1-v}>1,$$

az egyenlőtlenség igaz.
Ha

$$u<1,\quad\text{akkor}\quad (3+u-v)\geq 3-v\quad\text{és}\quad 1+\frac{u}{1-v}\geq 1.$$

Így

$$\begin{gathered}(3+u-v)\left(1+\frac{v}{1+u}\right)\cdot\left(1+\frac{u}{1-v}\right)\geq\\ \geq(3-v)\left(1+\frac{v}{1+u}\right)=3-v+\\ +(3-v)\frac{v}{1+u}\geq 3-v+\frac{2v}{1+u}=3+\frac{2v-v(1+u)}{1+u}=\\ =3+v\frac{1-u}{1+u}\geq 3\text{ mert } u<1\text{-ből}\frac{1-u}{1+u}>0.\end{gathered}$$

Egyenlőség csak akkor áll fent, ha $u=v=0$.

II. megoldás. A feltételből következik, hogy léteznek olyan nem negatív n és m számok, hogy $x=z+m+n$ és $y=z+n$ legyen.

Szorozzunk át a pozitív xyz-vel, majd alkalmazzuk az előbbi helyettesítést. Az igazolandó egyenlőtlenség ezek után így alakul:

$$(3z+2n+m)(z+2n+m)(z+m)\geq 3z(z+n+m)\cdot(z+n).$$

Egyoldalra hozva:

$$\begin{gathered}(3z+2n+m)(z+2n+m)(z+m)-3z(z+n+m)\cdot(z+n)=\\ =(3z+2n+m)(z+n+m)\cdot(z+m)-3z(z+n+m)(z+n)+\\ +n(3z+2n+m)(z+m)\geq(3z+2n)z(z+n+m)-\\ -3z(z+n)\cdot(z+n+m)+n(z+n+m)z=\\ =\big[3z+2n-3\cdot(z+n)+n\big]\cdot(z+n+m)z=\\ =(3z+2n-3z-3n+n)\cdot(z+n+m)z=0.\end{gathered}$$

Egyenlőség csak akkor állhat, ha $n=m=0$.