I. megoldás. Mivel n csak pozitív egész értékeket vehet fel, próbálkozzunk a teljes indukció módszerével. $n=1$ esetén a kifejezés értéke éppen 24, tehát a tétel igaz. Tegyük most fel, hogy $k^4+2k^3+11k^2+10k$ osztható 24-gyel és bizonyítsuk be, hogy ekkor $(k+1)^4+2(k+1)^3+11(k+1)^2+10(k+1)$ is osztható 24-gyel. Ehhez nyilván elég belátni, hogy az utóbbi két kifejezés különbsége: $4k^3+12k^2+32k+24$ osztható 24-gyel.

$$4k^3+12k^2+32k+24=4k^3+12k^2+8k+24(k+1).$$

Most már csak azt kell igazolni, hogy

$4k^3+12k^2+8k=4(k^3+3k^2+2k)$ mindig osztható 24-gyel, vagyis, hogy k^3+3k^2+2k mindig osztható 6-tal. Ez azonban mindig osztható 2-vel, mert az első 2 tag egyező párosságú, a harmadik pedig páros, 3-mal szintén mindig osztható: ha $k=3l$ ez triviális, ha $k=3l\pm1$ a 3-mal nem osztható tagok összege $\pm1\pm2=\pm3$-at ad maradékul.

Kántor Sándor

Megoldotta: Zobor E.

II. megoldás. Az oszthatóság igazolására célszerű a kifejezést szorzattá alakítani.

$$\begin{gathered}n^4+2n^3+11n^2+10n=n^4+2n^3+n^2+10n^2+10n=\\=\left(n^2+n\right)^2+10(n^2+n)=(n^2+n)(n^2+n+10)=\\=n(n+1)\left[n(n+1)+10\right].\end{gathered}$$

$n(n+1)$ és $n(n+1)+10$ mindketten párosak, sőt az egyik mindig osztható 4-gyel. Ha ugyanis $n(n+1)$ nem osztható 4-gyel, vagyis $n(n+1)=4k+2$, akkor $n(n+1)+10=4k+12$ osztható 4-gyel. A szorzat tehát mindig osztható 8-cal.

Most már csak azt kell belátnunk, hogy 3-mal is osztható.

Ha $n(n+1)$ osztható 3-mal, akkor tételünk igaz. Ha $n(n+1)$ nem osztható 3-mal, vagyis $n=3k+1$ és így $n(n+1)=3l+2$, akkor $n(n+1)+10=3l+12$ osztható 3-mal.

Kovács László

Megoldotta: Rédly E.