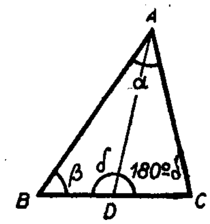
I. megoldás: A háromszög súlyvonalai és oldalai között kell összefüggéseket keresnünk.



Alkalmazzuk a cosinus tételt az $ABD\triangle$-re, majd az $ADC\triangle$-re is (figyelembe véve, hogy $\cos(180° - \delta) = -\cos\delta$)

$$c^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + s_a^2 - as_a\cos\delta,$$
$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + s_a^2 + as_a\cos\delta.$$

Adjuk össze a két egyenletet. Rendezés után

$$4s_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

Hasonlóképpen nyerhetjük a

$$4s_b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2, \qquad 4s_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$$

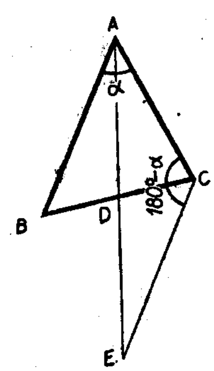
egyenleteket, végül ezek összeadása útján az

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

állításunkat bizonyítottuk.

Megoldotta: David P., Durst E., Kálmán L., Kántor S., Névtelen.

(Kálmán L. a cosinus tételt az ABD és ABC háromszögekre alkalmazta, Kántor S. tükrözte az A pontot D-re, nyerte az E pontot, ezután az ABC és ACE háromszögekre alkalmazta a cosinus tételt. Így jutottak a fenti összefüggésekhez.)



II. megoldás: $ABD\triangle$-re a cosinus tételt a következőképpen is felírhatjuk

$$s_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2 - ac\cos\beta.$$

Hasonlóan nyerhetjük az

$$s_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 - ba\cos\gamma, \qquad s_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + b^2 - cb\cos\alpha,$$

egyenleteket és ezeket összeadva a következőt:

$$s_a^2 + s_b^2 + s_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) +$$
$$+ \left[\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - ac\cos\beta - ba\cos\gamma - cb\cos\alpha\right].$$

Figyelembevéve, hogy

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

azaz

$$-ac\cos\beta = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2}, \quad -ba\cos\gamma = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2}$$

és

$$-cb\cos\alpha = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2};$$

ezeket behelyettesítve a szögletes zárójelbe, kiderül, hogy a zárójelben levő kifejezések értéke: 0, az egyenlet megmaradt része pedig bizonyítandó tételünket adja.

Megoldotta: Kovács L., Villányi O., Zobor E.

Vektorszámítás alkalmazásával oldotta meg: Seitz K.

Koordináta geometria alkalmazásával oldotta meg: Sajó J., Zatykó L.