Legyen $p_1 > p_2$. Rajzoljuk meg a kör ugyanazon pontjából kiindulva a p_1 és p_2 oldalú szabályos sokszögeket. A p_1 oldalú sokszög megszerkesztésével tulajdonképpen a teljes szöget osztottuk fel p_1 részre és megszerkesztettük a

$$\frac{360^\circ}{p_1},\ \frac{2\cdot 360^\circ}{p_1},\ \frac{3\cdot 360^\circ}{p_1},\ \dots$$

szögeket, ugyanígy a p_2 oldalú sokszög szerkesztése a

$$\frac{360^\circ}{p_2},\ \frac{2\cdot 360^\circ}{p_2},\ \frac{3\cdot 360^\circ}{p_2},\ \dots$$

szögeket szolgáltatja, míg a $p_1 \cdot p_2$ oldalú szabályos sokszög szerkesztése a $\dfrac{360^\circ}{p_1p_2}$ szög szerkesztésével egyértelmű feladat.

A kérdés ezután így fogalmazható: kijelölhető-e a p_1 oldalú sokszög valamelyik, pl. a-ik szögpontja és a p_2 oldalú sokszög egyik, pl. b-ik szögpontja úgy, hogy e pontokat a kör középpontjával összekötve $\dfrac{360^\circ}{p_1p_2}$ szög keletkezzék, azaz van-e olyan a és b egész érték, mely eleget tesz az

$$a\frac{360^\circ}{p_1} - b\frac{360^\circ}{p_2} = \frac{360^\circ}{p_1p_2},$$

illetőleg

$$p_2a - p_1b = 1 \tag{1}$$

diophantosi egyenletnek?

Ha p_1 és p_2 nem relatív prímek, hanem r a közös osztójuk, tehát

$$p_1 = rq_1 \quad \text{és} \quad p_2 = rq_2$$

ahol a q_1 és q_2 hányadosok egészszámok, akkor az (1) egyenlet így írható

$$r(aq_1 - bq_2) = 1,$$

ez pedig ellentmondást fejez ki: az egység nem bontható fel két egytől különböző egész tényezőre. Eszerint a feladat megoldásának szükséges feltétele, hogy p_1 és p_2 relatív prímek legyenek.

Vizsgáljuk ezután az (1) egyenletet azzal a feltétellel, hogy p_1 és p_2 relatív prímek. Fejezzük ki belőle a-t:

$$a = \frac{1 + bp_1}{p_2}, \tag{2}$$

és tegyük fel kérdésünket a következő formában: b-nek rendre más és más egész értékeket adva, elő fog-e fordulni, hogy valamelyik esetben a-ra is egész számot kapunk? Lapunk II. évfolyamának 5. számában a 244. oldal 3. és 4. bekezdésében[1] bebizonyítottuk, hogy b-nek 1-től $p_2 - 1$-ig különböző egész értékeket adva, a $\dfrac{bp_1}{p_2}$ osztásnál 1-től $p_2 - 1$-ig minden maradék előfordul. b azon értékénél, amikor a maradék $(p_2 - 1)$, tehát $bp_1 = p_2q + (p_2 - 1)$ (ahol q hányados egész szám), a (2) egyenlet szerint

$$a = \frac{1 + p_2q + (p_2 - 1)}{p_2} = q + 1.$$

a is egész szám lesz és az a és b számok meghatározásával feladatunkat meg is oldottuk.

Ha tehát $(p_1, p_2) = 1$, a feladat mindig megoldható és a mondottak szerint a tényleges megoldáshoz legfeljebb $(p_2 - 1)$ számú osztást kell elvégeznünk, ill. a kérdéses osztások maradékát megállapítanunk.

Kántor Sándor

Megoldotta: Dávid P.

[1] *Fried E.:* A prímszámok számáról.