I. megoldás: Válasszunk egy akkora k értéket, melyre $2^{2k+1} > n$. Ekkor

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{\left(2^{2k+1}-1\right)^2}.$$

A fenti összeg tagjait csoportosítsuk a következőképpen:

$$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{7^2}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{\left(2^k+1\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(2^{2k+1}-1\right)^2}\right).$$

A csoportosítást úgy végezzük, hogy a k-adik zárójelben az első tag $\frac{1}{2^{2k}}$ alakú legyen. Akkor az l-edik zárójelbe 2^l számú tag kerül, mert a (2^l+1)-edik tag: $\frac{1}{\left(2^l+2^l\right)^2} = \frac{1}{2^{2(l+1)}}$ a csoportosítás szerint az $(l+1)$-edik zárójel első tagja lesz.

Jelöljük az első zárójelben álló tagok összegét a_1-el, az l-edikben állók összegét a_l-el. Az összeget akkor így írhatjuk:

(1) $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{\left(2^{2k+1}-1\right)^2} = 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

Vizsgáljuk meg a k-adik zárójel értékét.

$$a_k = \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{\left(2^k+1\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(2^{k+1}-1\right)^2}.$$

A zárójelben álló összeg értéke növekszik, ha minden tag helyébe a nála nagyobb első tagot írjuk.

$$a_k < \left(\frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{2^{2k}} + \cdots\right) = 2^k \cdot \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k}.$$

Így az

(2) $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k}$$

geometriai sor megfelelő indexű tagjai rendre nagyobbak lesznek az (1) alatti összeg megfelelő tagjainál, tehát az (1) alatti összeg, vagyis az eredetileg megbecsülni kívánt összeg is kisebb ezen geometriai sor összegénél.

Mivel a (2) geometriai sor összege $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} < \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, az állítást bebizonyítottuk.

II. megoldás. Nagyobbítjuk az összeget, ha az egyes törtek nevezőit csökkentjük. Írjunk 2^2 helyett $1 \cdot 2$-t, 3^2 helyett $2 \cdot 3$-at, 4^2 helyett $3 \cdot 4$-et, általában k^2 helyett $(k-1)\,k$-t. Mivel $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, így

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)n} = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$