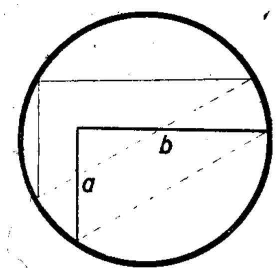
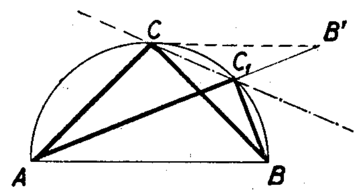
I. megoldás: Kössük össze a szögszárak körrel való metszéspontjait. Húzzunk ezzel a húrral párhuzamos átmérőt és a végpontjaiban a szögszárakkal párhuzamost.



Ezek a párhuzamosok kell hogy a körön messék egymást, mert azon pontok mértani helye, amelyből egy távolság derékszögben látszik, a távolság mint átmérő fölé rajzolt kör. Az így keletkezett háromszögek hasonlóak és az a nagyobb, melynek átfogója körátmérő, tehát a befogók összege is ebben nagyobb. Minden derékszöghöz a körben találunk tehát olyan kerületi szöget, melynek szárain a körbe eső szakaszok összege nagyobb. Elég tehát az átmérő fölé rajzolt derékszögű háromszögek közt keresni, hogy melyikben a legnagyobb a befogók összege. Megmutatjuk, hogy ez az egyenlőszárú háromszögre következik be. Legyen ABC az egyenlőszárú és ABC_1 egy tetszőleges derékszögű háromszög az AB átmérő fölött.



Tükrözzük a C_1-en átmenő külső szögfelezőre a BC_1 oldalt. Legyen a tükörkép C_1B'. Miután a külső szögfelezőre tükröztünk, A, C_1 és B' egy egyenesre esnek. A külső szögfelező $45°$-os szöget zár be a befogókkal. Másrészt $AC_1C\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 45°$, mert közös köríven nyugvó kerületi szögek. Így a külső szögfelező átmegy C-n is, tehát BC tükörképe ránézve $B'C$. Az $AB'C\triangle$-ből $AC + CB = AC + CB' > AB' = AC_1 + C_1B' = AC_1 + C_1B$.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy azon derékszögeken lesz a szárak körbe eső szakaszainak összege a legnagyobb, melyeknek szárai egy átmérő végpontjain mennek keresztül, csúcsa pedig ezen átmérő feletti félkör középpontja.

II. megoldás: Jelöljük a szögszárak körbe eső szakaszainak hosszát a-val és b-vel. Bármely két pozitív a, b számra fennáll az

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

egyenlőtlenség, és az egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $a = b$.

Mielőtt ezt bebizonyítanánk, lássuk, hogyan szolgáltatja ez a feladat megoldását. Ha a és b a kérdéses szakaszok, $a + b$ és vele $\frac{a+b}{2}$ értéke is akkor a legnagyobb, ha a jobboldal a lehető legnagyobb és a baloldal egyenlő vele, feltéve, hogy ez az eset bekövetkezhet. A jobboldal számlálójának geometriai értelme a szögszárak metszéspontjai közti húr hossza. Ez akkor a legnagyobb, ha e húr éppen egy átmérő. Ez esetben is a baloldal akkor és csakis akkor egyenlő vele, ha $a = b$, vagyis egy átmérő fölé rajzolt egyenlőszárú derékszögű háromszög szárai.

Megoldásunk tehát teljes lesz, ha bebizonyítjuk az (1) egyenlőtlenséget. Elég helyette a két oldal négyzete közt a megfelelő egyenlőtlenséget bizonyítani, mert mindkét oldalon pozitív szám áll és pozitív számok közül az a nagyobb, amelyiknek a négyzete nagyobb. Bizonyítsuk be tehát, hogy[1]

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

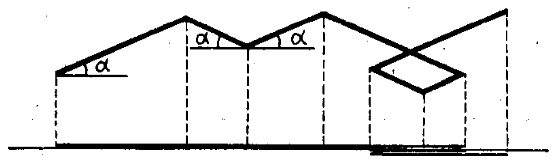
Azt mutatjuk meg, hogy a két oldal különbsége nem lehet negatív:

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4} = \frac{a^2-2ab+b^2}{4} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \geq 0,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $a = b$. Ebből következik, hogy a fönti egyenlőség, s így megjegyzésünk szerint, az is hogy (1) fennáll és egyenlőség ezekben is csak akkor állhat, ha $a = b$.

III. megoldás: Rajzoljunk tetszőleges törött vonalat, melynek minden szakasza egy adott egyenessel ugyanakkora szöget zár be.

[1] Az egyenlőtlenség következik 236* feladatban bizonyított egyenlőtlenségből is, ha abba $c = d = 1$-et helyettesítünk.



Nyilvánvaló, hogy ennek összhossza akkor a leghosszabb, amikor vetülete az egyenesen a leghosszabb. (Természetesen ha az egyenes egy szakaszára a törött vonal több darabjának vetülete esik, akkor ezt a szakaszt megfelelően többször vesszük számba a vetületben is.)

Húzzuk meg az adott derékszög külső szögfelezőjét. Ez mindkét szögszárral ugyanakkora (45°-os) szöget zár be. Vetítsük rá a derékszög szárait. Ez a vetület ugyanakkora, mint annak a húrnak a vetülete, melyet a szög szárai vágnak ki a körből. Nem lehet tehát hosszabb a vetület, mint a kör átmérője. Az átmérővel egyenlő hosszú akkor lesz, ha a derékszög átmérőn nyugszik és ez az átmérő párhuzamos a meghúzott külső szögfelezővel. Ez akkor következik be, ha az átmérő és a szögszárak egyenlőszárú derékszögű háromszöget határolnak.

Megjegyzés: Ezzel egyúttal egyszerű geometriai bizonyítást nyertünk az előző megoldásban használt egyenlőtlenségre is.