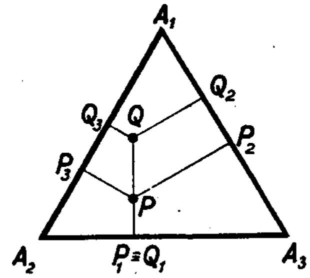
I. megoldás: Mozdítsuk el P-t pl. az A_2A_3, oldalra merőleges irányban egy Q pontba. Legyenek ennek vetületei az oldalakra Q_1, Q_2, Q_3. $Q_1 = P_1$ tehát A_3P_1 változatlan marad.

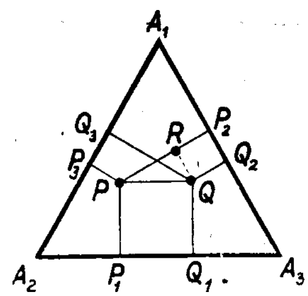


P_2Q_2 és P_3Q_3 közül egyik növeli, másik csökkenti az összeget. De ez a két szakasz egyenlő, mert a PQ szakasz vetületei az A_3A_1 és A_1A_2 oldalakra, a PQ egyenes iránya pedig mindkét oldallal $30°$-os szöget zár be.

Egy ilyen eltolásnál tehát nem változik a vizsgált távolságösszeg. Egy pontból a másikba azonban mindig el tudunk jutni, csak a háromszög oldalaira merőleges irányokba haladva, így bármely pontban ugyanakkora a vetületösszeg. A pontot az egyik csúcsba vive át látjuk, hogy értéke mindig a fél kerület.

Megoldotta: Villányi O. és ifj. Csonka P.

II. megoldás: Mozdítsuk el pl. az A_2A_3 oldallal párhuzamosan a P pontot egy Q helyzetbe. Q vetületei az oldalakra Q_1, Q_2, Q_3.

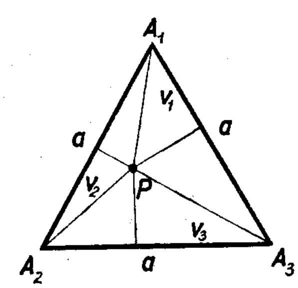


P_2Q_2 és P_3Q_3 mindkettő növeli, vagy mindkettő csökkenti az összeget, P_1Q_1 azonban épp ellenkező értelemben változtatja. $P_1Q_1 = PQ$, továbbá $P_3Q_3 = P_2Q_2$, mert PQ iránya az A_3A_1 és A_1A_2 oldalakéval egyformán $60°$-os szöget zár be. Legyen Q vetülete PP_2-n (vagy meghosszabbításán) R, ekkor a PQR derékszögű háromszögben QR-rel szemben $30°$-os szög fekszik s így $QR(= QP_2) = \dfrac{1}{2}PQ$. Így $P_2Q_2 + P_3Q_3 = PQ$, tehát az összeget ugyanannyival növeltük, mint csökkentettük.

Mivel minden pontból bármelyikbe el lehet jutni az oldalakkal párhuzamos utakon is, tehát tételünk igaznak bizonyult.

Megoldotta: Villányi O.

III. megoldás: A rövidebb írás kedvéért jelöljük a háromszög oldalát a-val, a PP_1, PP_2, PP_3; A_1P_2, A_2P_3, A_3P_1 távolságokat rendre p_1, p_2, p_3, v_1, v_2, v_3-mal.



Fejezzük ki Pythagoras tételével kétféleképpen a PA_1, PA_2, PA_3 távolságokat:

$$PA_3^2 = v_3^2 + p_1^2 = (a - v_1)^2 + p_2^2;$$
$$PA_1^2 = v_1^2 + p_2^2 = (a - v_2)^2 + p_3^2;$$
$$PA_2^2 = v_2^2 + p_3^2 = (a - v_3)^2 + p_1^2.$$

Innen

$$v_3^2 - v_1^2 + p_1^2 - p_2^2 = a^2 - 2av_1;$$
$$v_1^2 - v_2^2 + p_2^2 - p_3^2 = a^2 - 2av_2;$$
$$v_2^2 - v_3^2 + p_3^2 - p_1^2 = a^2 - 2av_3.$$

A három egyenletet összeadva: $3a^2 - 2a(v_1 + v_2 + v_3) = 0$, vagyis $v_1 + v_2 + v_3 = \frac{3}{2}a$.

Megjegyzés. Ha hasonló számolást tetszőleges háromszögre végzünk, az A_3A_1, A_1A_2, A_2A_3 oldalakat rendre a, b, c-vel jelölve, egyébként a fenti jelöléseket megtartva, akkor az

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

összefüggéshez jutunk. Ha P pl. az A_2 csúcsba esik, akkor P_1 és P_3, is összeesik A_3-mal, tehát $v_1 = a$, $v_2 = c\cos\alpha$, ahol α a b és c oldal közti szög, és $v_3 = 0$. Így összefüggésünk a cosinustételt adja.

Két további különböző megoldást küldött be: Villányi O.