I. megoldás:

$$\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)},$$

közös nevezőre hozva

$$\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)},$$

a kéttagú kifejezés köbét többtagúvá alakítva és az összevonást elvégezve a tört

$$\begin{aligned}&\frac{-3a^2b+3ab^2-3b^2c+3bc^2-3ac^2+3a^2c}{a^2b+a^2c-ac^2-b^2c+b^2a+b^2c}=\\&=3\frac{-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2+a^2c}{-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-ac^2+a^2c}=3.\end{aligned}$$

Csonka Pál (II. oszt.)

II. megoldás: A közös nevezőre való hozás után ne szorozzunk be a nevezőben és a számlálóban se bontsuk fel a zárójeleket, hanem a számlálót alakítsuk szorzattá, mert ez teszi lehetővé az egyszerűsítést.

$$\begin{aligned}&\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}=\\&=\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(b-c)(c-a)(a-b)}.\end{aligned}$$

Az első két tag köbének összegét szorzattá alakítjuk:

$$\frac{[(a-b)+(b-c)][(a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2]+(c-a)^3}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

összevonva és $(c-a)$-t kiemelve

$$\frac{-(c-a)[(a-b)^2+(b-c)^2-(c-a)^2-(a-b)(b-c)]}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

a két négyzet különbségét szorzattá alakítva

$$\begin{aligned}&\frac{-(c-a)[(a-b)^2-(a-b)(b+a-2c)-(a-b)(b-c)]}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\\&=\frac{(c-a)(a-b)[-(a-b)+(b+a-2c)+(b-c)]}{(b-c)(c-a)(a-b)}=\\&=\frac{(c-a)(a-b)(3b-3c)}{(b-a)(c-a)(a-b)}=\frac{3(c-a)(a-b)(b-c)}{(b-c)(c-a)(a-b)}=3.\end{aligned}$$

III. megoldás: Az előző megoldásnál, miután a két köb összegéből kiemeltük az alapok összegét, láttuk, hogy a számláló osztható $(c-a)$-val. Azonban anélkül, hogy az előbbi számolást végigvinnénk, rögtön következtethetünk, hogy szimmetria okokból $(b-c)$ és $(a-b)$-vel is osztható a számláló. Minthogy azonban a számláló harmadfokú kifejezés, ebből már következik, hogy a nevezőtől csak egy a, b és c-től független állandó szorzóban különbözhet. Ekkor azonban nyilván a tört értéke is ez az állandó. Az állandó értékét a legegyszerűbben úgy kaphatjuk meg, ha a, b és c helyébe alkalmas számokat helyettesítünk.
Legyen $a=1$, $b=0$, $c=-1$. Ekkor

$$a-b=1,\qquad b-c=1,\qquad c-a=-2$$

$$\frac{1^3+1^3+(-2)^3}{1\cdot 1\cdot(-2)}=\frac{-6}{-2}=3.$$

IV. megoldás: Jelöljük $a-b$-t α-val, $b-c$-t β-val, $c-a$-t γ-val.

Minthogy $\alpha+\beta+\gamma=0$, $\gamma=-(\alpha+\beta)$.

Ezeket az eredeti tört kifejezésbe helyettesítve

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\alpha^3+\beta^3-(\alpha+\beta)^3}{\alpha\beta\gamma}=\\&=\frac{-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2}{-\alpha\beta(\alpha+\beta)}=\frac{3(-\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{-\alpha\beta(\alpha+\beta)}=3.\end{aligned}$$