**I. megoldás:**

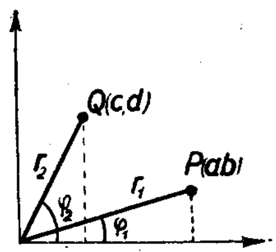
$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(ac)^2+(bd)^2+2abcd+(ad)^2+(bc)^2-2abcd}.$$

(Egy tagot pozitív és negatív jellel beiktatva két teljes négyzetet alakítottunk.)

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(ac+bd)^2+(ad-bc)^2}\geq\sqrt{(ac+bd)^2}=$$
$$=ac+bd.$$

Ezzel a kívánt egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $ad=bc$, azaz $a/c=b/d$, vagyis ha az $a$, $b$ és $c$, $d$ számpárok arányosak.

**II. megoldás:** Tekintsük egy derékszögű koordinátarendszerben azon $P$ és $Q$ pontokat, amelyeknek koordinátái $(a,\ b)$ illetve $(c,\ d)$ számpárok.




$P$ pontnak az origótól való távolsága $r_1$, $Q$ ponté $r_2$; e távolságok a vízszintes tengellyel $\varphi_1$ és $\varphi_2$ nagyságú szöget zárnak be.

A rajzból látható:

$$a=r_1\cos\varphi_1;\quad b=r_1\sin\varphi_1;\quad c=r_2\cos\varphi_2;\quad d=r_2\sin\varphi_2;$$
$$\sqrt{a^2+b^2}=r_1\quad \text{és}\quad \sqrt{c^2+d^2}=r_2.$$

Az igazolandó egyenlőtlenség

$$r_1r_2\geq r_1r_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2+r_1r_2\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

alakba megy át. A jobboldal azonban átalakítható,

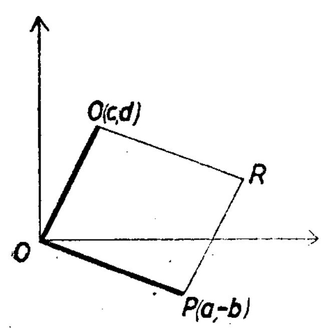
$$r_1r_2\geq r_1r_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

vagyis

$$1\geq\cos(\varphi_1-\varphi_2).$$

Ez azonban mindig fennáll. Tehát a következtetést visszafelé olvasva, a kiinduló egyenlőtlenség is igaz. Egyenlőség akkor következik be, ha $\varphi_1-\varphi_2=0$.

**III. megoldás:** Rajzoljuk fel egy derékszögű koordinátarendszerben a $P(a,\ -b)$ és a $Q(c,\ d)$ koordinátájú pontokat.




Az $OPRQ$ paralelogramma területét, (mint az $OPQ\Delta$-ének a kétszeresét) a koordinátageometriában tanultak szerint az $ad+bc$ kifejezés adja.

A paralelogramma oldalai $\sqrt{a^2+b^2}$, illetve $\sqrt{c^2+d^2}$ hosszúak.

A paralelogramma területe azonban kisebb, vagy egyenlő, mint a két szomszédos oldalának szorzata, azaz

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\geq ad+bc.$$

Egyenlőség akkor következik be, ha az $OP$ egyenes merőleges az $OQ$ egyenesre.

**Megjegyzés:** A geometriai bizonyításokban a négyzetgyökjelet pozitív előjellel vettük tekintetbe. Természetesen akkor is igaz az állítás, ha mindkét gyököt negatív előjellel vesszük. Nem egyező előjel esetén nem igaz az állítás.