I. megoldás: Írjuk az összeget a következő alakba:

$$\begin{aligned}S_n = 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \ldots + 1(n-1) + 1n+\\ +2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \ldots + 2(n-1) + 2n+\\ +3\cdot 4 + \ldots + 3(n-1) + 3n+\\ +(n-1)n.\end{aligned}$$

A tagokat oszloponként összegezzük

$$\begin{aligned}
s_1 &= 0\\
s_2 &= 1\cdot 2 && = 2\\
s_3 &= 1\cdot 3 + 2\cdot 3 && = (1+2)3 = 9\\
s_4 &= 1\cdot 4 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4 && = (1+2+3)4 = 24\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
s_n &= (1+2+3+\ldots+n-1)n.
\end{aligned}$$

Azaz

$$S_n = 0 + 1\cdot 2 + (1+2)3 + \ldots + \frac{(n-1)n^2}{2}.$$

Minthogy az n-edik tag harmadfokú polinom kifejezés n-re nézve, ez harmadrendű számtani sorozat. (Ez a sorozat harmadik differenciasorának képzésével is könnyen igazolható.)

Feladatunk tehát a (10) formula alapján megoldható, ha meghatározzuk $s_n = \alpha_1 + \alpha_2\binom{n-1}{1} + \alpha_3\binom{n-1}{2}\alpha_4\binom{n-1}{3}$ előállításában az α_1, α_2, α_3, α_4 konstansokat. Sorra $n = 1, 2, 3, 4$-et téve adódik $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $a_3 = 5$, $a_4 = 3$, tehát

$$S_n = 2\binom{n}{2} + 5\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}.$$

II. megoldás: Az előbbi módon átrendezett sorozatot egészítsük ki a következőképpen:

$$\begin{gathered}1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 1\cdot 4 + \ldots + 1(n-1) + 1n+\\ 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + \ldots + 2(n-1) + 2n+\\ \ldots\\ n\cdot 1 + n\cdot 2 + n\cdot 3 + n\cdot 4 + \ldots + n(n-1) + n\cdot n.\end{gathered}$$

Látjuk, hogy az egyik átlóban az első n négyzetszám helyezkedik el, ettől jobbra az eredeti sorozat elemei, balra ugyanezek az elemek helyezkednek el. Minthogy az egész kifejezés összege $\binom{n+1}{2}^2$, ha a négyzetszámok összegét ebből levonjuk, a keresett összeg kétszeresét nyerjük. A négyzetszámok összege $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ tehát

$$2S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$n(n+1)$-et kiemelve

$$S_n = n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{8} - \frac{2n+1}{12}\right] = n(n+1)\left[\frac{3n(n+1)-4n-2}{24}\right] =$$

$$= n(n+1)\left[\frac{3n^2+3n-4n-2}{24}\right] = \frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{24}.$$

III. megoldás: Jelöljük az első n szám négyzetének összegét S_n^2, köbének összegét S_n^3-el.

Tekintsük most ismét a sorozatnak a legelső megoldásban felhasznált átalakított formáját. Ebben a $(k-1)$-edik oszlopban álló tagok összege $k\binom{k}{2} = \frac{1}{2}(k^3 - k^2)$, ezt kell összegezni $k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n$-re, azaz – mivel $k = 1$-re 0-t ad – összegezhetjük 1-től n-ig. Így kapjuk, hogy $S_n = \frac{1}{2}(S_n^3 - S_n^2)$.

Egészítsük ki most a sorozatot ugyanúgy, mint az előző megoldásnál.

$$\begin{gathered}1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3 + \ldots + 1\cdot n\\ 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n\\ \vdots\\ n\cdot 1 + n\cdot 2 + n\cdot 3 + \ldots + n\cdot n\end{gathered}$$

Most nézzük meg, mi az a többlet, ami a k-adik sorhoz hozzájárult. Eredetileg volt:

$$k(k+1)+k(k+2)+\ldots+kn$$

az új sor

$$k\cdot 1+k\cdot 2+\ldots k\cdot k+k\cdot(k+1)+\ldots+k\cdot n$$

a többlet

$$k(1+2+\ldots+k)=k\binom{k+1}{2}=\frac{k^3+k^2}{2}.$$

Ezt összegezve $k=1,\ldots n$-re kapjuk $\frac{1}{2}(S_n^3+S_n^2)$-et. Ezt kell levonnunk az egész összegből, hogy S_n-et megkapjuk.

$$S_n=\binom{n+1}{2}^2-\frac{1}{2}(S_n^3+S_n^2),$$

de mint már az előbb beláttuk,

$$S_n=\frac{1}{2}(S_n^3-S_n^2).$$

A két egyenletet összeadva és 2-vel osztva kapjuk:

$$S_n=\frac{1}{2}\left[\binom{n+1}{2}^2-S_n^2\right]=\frac{1}{2}\left[\binom{n+1}{2}^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right],$$

amit az előbbi módon szorzatalakra hozhatunk.

Ennek a megoldásnak, bár hosszadalmasabb, mint az előbbi, érdekessége, hogy megadja az első n szám köbének összegét. Ha a fenti két egyenletet nem összeadjuk, hanem egyikből a másikat kivonjuk, kapjuk:

$$S_n^3=\binom{n+1}{2}^2.$$

Ugyanezt megkaphatnánk úgy is, ha az első egyenletet az I. megoldás kiinduló egyenletével hasonlítanánk össze.