I. megoldás: Bármely az adott tulajdonsággal bíró P ponton átmenő két húr, az egyik pl. a k_1 kör A_1B_1 húrja, a másik a k_2 kör A_2B_2 húrja, – olyan, hogy

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2. \tag{1}$$

Azt kell vizsgálnunk tehát, hogy ez az egyenlőség mely pontokra igaz. Mivel a k_1 és k_2 körnek a P pontra illeszkedő bármely két húrját tekinthetjük, célszerű lesz azt a közös húrt venni, amely a körök egyik metszéspontján, a B ponton megy át. Írjuk át az (1) feltételt erre a húrra:

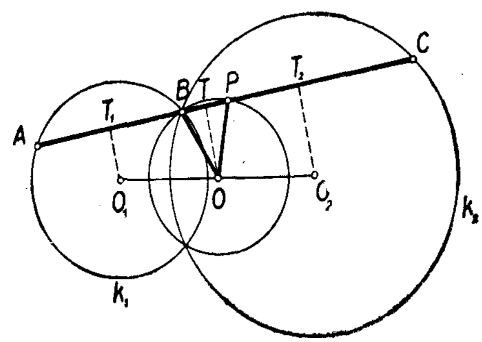
$$PA \cdot PB = PB \cdot PC$$

és PB-vel osszunk, ekkor a

$$PA = PC \tag{2}$$

egyszerű feltételt kapjuk. Eszerint azt kell megvizsgálnunk, mi a mértani helye a két kör közös pontján átmenő AC húrok felezéspontjainak. Bebizonyítjuk, hogy ez az a kör, melynek középpontja a két kör O_1O_2 centrálisának O felezéspontja és átmegy az adott körök közös pontjain.

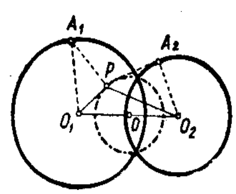
Az AC szakasz két húr összege, AB darabja a k_1 kör húrja, jelöljük ennek felét h_1-gyel, BC pedig a k_2 kör húrja, ennek felét h_2-vel jelöljük. Bocsássunk az O_1, O_2 és O pontokból AC-re merőleges egyeneseket, ezek talppontjait jelöljük rendre T_1, T_2 és T-vel, utóbbi felezi a T_1T_2 szakaszt.



Másrészt $T_1B = h_1$, a rajz szerint ezenkívül (2) szerint $PC = AC/2 = h_1 + h_2$ és így $PT_2 = h_1$ is fennáll. Eszerint $T_1B = T_2P$, tehát a T-vel felezett T_1T_2 szakasz másik két darabja is egyenlő: $BT = PT$, a BTO és PTO derékszögű háromszögek egybevágók s így $OB = OP$, amivel állításunkat bebizonyítottuk.

Ez a megoldás lényegesen kihasználta, hogy a két kör metszi egymást. A kívánt tulajdonságú pontok azonban léteznek és ugyancsak kört alkotnak, bizonyos feltételek esetén akkor is, amikor a körök nem metszik egymást.

II. megoldás. Legyen a két kör k_1 és k_2 középpontjuk O_1 és O_2, sugaruk r_1 és r_2; egy kívánt tulajdonságú pont P, mely legyen a k_1 kör belsejében és k_2-n kívül.



A k_1-re vonatkozó hatvány értékét az O_1P-re merőleges sugár felének a négyzete adja, a k_2-re vonatkozót pedig a P-ből húzott érintő négyzete. E fél húrnak és érintőnek kell tehát egyenlő hosszúnak lennie. A húr egyik végpontját A_1-gyel, az egyik érintő érintési pontját pedig A_2-vel jelölve Pythagoras tétele szerint

$$r_1^2 = O_1P^2 + PA_1^2, \qquad \text{és} \qquad r_2^2 = O_2P^2 - PA_2^2.$$

A kettő összegéből $PA_1 = PA_2$ folytán

$$r_1^2 + r_2^2 = O_1P^2 + O_2P^2.$$

A baloldal értéke független P-től, tehát a jobboldalé is. Az O_1O_2P háromszögben tehát két oldal négyzetösszege és a harmadik oldal állandó, független a P pont helyzetétől. Ezekből az adatokból kiszámítható azonban a P-ből húzható súlyvonal hossza is. Ha az O_1O_2 oldal felezőpontját O-val jelöljük,[1]

$$OP^2 = \frac{1}{2}(O_1P^2 + O_2P^2) - O_1O^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - O_1O^2.$$

[1] A P-ből O_1O_2-re bocsátott merőleges hosszát a-val, talppontjának távolságát O-tól b-vel jelölve, ha a talppont O-tól O_1 felé esik, $OP^2 = a^2+b^2$, $O_1P^2 = a^2+(O_1O-b)^2$, $O_2P^2 = a^2+(O_2O+b)^2 = a^2+(O_1O+b)^2$,s így $O_1P^2+O_2P^2 = 2(O_1O^2+a^2+b^2) = 2O_1O^2+2OP^2$, amiből következik a fenti egyenlőség.

Ilyen P pontok tehát akkor léteznek, ha

$$O_1O_2 = 2O_1O \leq 2\sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} = \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)},$$

és ebben az esetben egy O középpontú körön feküsznek.

Mivel

$$\sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)} = \sqrt{(r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2) + (r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2)} =$$
$$= \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} > r_1 + r_2, \quad \text{ha} \quad r_1 \neq r_2;$$

tehát ilyen pontok nem metsző körök esetén is lehetnek, ha azok elég közel vannak egymáshoz.