

Ezt a feladatot visszavezetjük a 217-es feladathoz hasonló feladatra.

Legyen  $k$  egy tetszés szerinti nagy rögzített pozitív szám. Helyettesítsünk  $u$  helyébe  $2^x$ -et, akkor

$$2^{2^x} > 2^{kx}.$$

Ez az egyenlőtlenség teljesül, ha  $2^x > kx$ .  $k$  felírható, mint 2-nek valamilyen hatványa, vagyis  $2^x > 2^c x$  egyenlőtlenséget kell vizsgálnunk. Legyen  $x = 2^{t+1}$ . Ekkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$2^{2^{t+1}} > 2^c \cdot 2^{t+1} = 2^{c+t+1}$$

Ismét a kitevőket vizsgálva

$$2^{t+1} > c + t + 1\text{-nek kell teljesülnie.}$$

A baloldal átalakítható, mert  $2^{t+1} = 2^t + 2^t$ .

$$2^t + 2^t > c + t + 1$$

de  $2^t > t$

Tehát a feltétel teljesül, ha  $2^t > c + 1$

vagyis  $t > \frac{\log(c+1)}{\log 2}$

Visszahelyettesítve  $x = 2^{t+1} > 2^{\frac{\log(c+1)}{\log 2} + 1} = 2^{\frac{\log [2(c+1)]}{\log 2}}$

és  $u = 2^x > 2^2 \frac{\log [2(c+1)]}{\log 2}$  ahol  $c = \frac{\log k}{\log 2}$

**Megjegyzés.** Ez a becslés nem a pontos korlátot adja, hanem a 217 esetében  $k = 100$  így  $c = \frac{2}{\log 2} > 7$ ,

$x > 2 \frac{\log 16}{\log 2} = 2^4 = 16$ . Viszont már láttuk, hogy  $u \geq 10$ -től is igaz a keresett egyenlőtlenség.