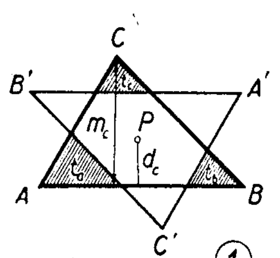
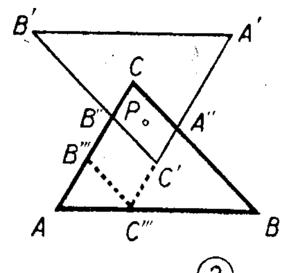
A szimmetria középpontját egyelőre vegyük fel tetszőlegesen. Világos, hogy a felvett P pontra nézve szimmetrikus sokszögek közül maximális területű az az idom lesz, amelyet az adott ABC háromszög és ennek P pontra tükrözöttje, $A'B'C'$ háromszög egyaránt lefed, mert minden más P pontra szimmetrikus, a háromszög belsejében fekvő idom beleesik e közös részbe is.

Ezek után az a kérdés, melyik az a P pont, amelyre nézve tükrözve a háromszöget, a két háromszög közös részének területe a lehető legnagyobb?

Jelöljük a szokásos módon a háromszög magasságvonalait m_a, m_b, m_c-vel, P pont távolságait az egyes oldalaktól d_a, d_b, d_c-vel. Feltehető, hogy



1.



2.

$$d_a \leq \frac{m_a}{2},\ d_b \leq \frac{m_b}{2},\ d_c \leq \frac{m_c}{2}.$$

Ellenkező esetben ugyanis az ABC háromszög tükörképének valamelyik csúcspontja a háromszög belsejébe esik és (l. a 2. ábrát!) az $A''C'''B'''C$ paralelogramma olyan idom, mely középpontjára nézve tükrös tulajdonságú, tehát a feladat követelményének megfelel és a területe nagyobb, mint a két háromszög közös részének területe.

Ismeretes, hogy az m-ek és d-k között fennáll a következő összefüggés[1]

$$\frac{d_a}{m_a} + \frac{d_b}{m_b} + \frac{d_c}{m_c} = 1. \tag{1}$$

A közös rész területe akkor lesz a legnagyobb, ha az ABC háromszögből kimaradt (bevonalkázott) háromszögek területének összege minimális. Jelöljük a kimaradó háromszögek területeit t_a, t_b, t_c-vel, összegüket y-nal, $ABC\triangle$ területét T-vel. Valamely kis háromszög területe úgy aránylik az $ABC\triangle$ területéhez, mint magasságaik négyzete, tehát pl.

$$\frac{t_a}{T} = \frac{(m_a - 2d_a)^2}{m_a^2}$$

ebből

$$t_a = \left(1 - 2\frac{d_a}{m_a}\right)^2 T$$

összegük

$$y = T\left[\left(1 - 2\frac{d_a}{m_a}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{d_b}{m_b}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{d_c}{m_c}\right)^2\right].$$

A szögletes zárójelben levő kifejezés harmadrésze három négyzet számtani közepe. Ez a négyzetes közép nagyobb vagy egyenlő a három mennyiség számtani közepének négyzeténél[2], következésképpen (felhasználva (1)-et)

$$y \geq 3T\left[\frac{\left(1 - 2\,\dfrac{d_a}{m_a}\right) + \left(1 - 2\,\dfrac{d_b}{m_b}\right) + \left(1 - 2\,\dfrac{d_c}{m_c}\right)}{3}\right]^2 =$$

$$= 3T\left\{\frac{1}{3}\left[3 - 2\left(\frac{d_a}{m_a} + \frac{d_b}{m_b} + \frac{d_c}{m_c}\right)\right]\right\}^2 = \frac{1}{3}T.$$

---

[1] Az egyes törteket a megfelelő oldal hosszával bővítve a nevezők értéke megegyezik, s ugyanazt a területet jelenti, mint a számlálók összege.

[2] Legyen ugyanis p, q, r három tetszőleges pozitív szám, és a számtani közepük $s = \dfrac{p+q+r}{3}$. Legyen $p = s + x$, $q = s + y$, $r = s + z$. Ekkor

$$x + y + z = 0, \text{ s így } \frac{p^2 + q^2 + r^2}{3} = \frac{3s^2 + 2(x + y + z)s + x^2 + y^2 + z^2}{3} =$$

$$= s^2 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} \geq s^2 = \left(\frac{p+q+r}{3}\right)^2.$$

Egyenlőség csak az $x = y = z = 0$, azaz $p = q = r$ esetben állhat fenn.

y akkor minimális, ha az egyenlőség áll fenn, ami akkor és csakis akkor következik be, ha a kis zárójelben levő mennyiségek egyenlők, ez esetben pedig

$$\frac{d_a}{m_a}=\frac{d_b}{m_b}=\frac{d_c}{m_c}=\frac{1}{3}. \tag{2}$$

A legutolsó egyenlőség (1)-ből következik.)

(2) szerint P pont az $ABC\triangle$ súlypontja és adott háromszögbe írható, egy pontra szimmetrikus és maximális területű az a sokszög, mely a háromszög és a háromszög súlypontjára vonatkozó tükörképének közös része. E közös rész területe $\frac{2}{3}$-a a háromszögének.

Megjegyzés: A tétel megfelelője fennáll a térben is, ha háromszög helyett tetraédert mondunk és a beírható egy pontra szimmetrikus maximális köbtartalmú poliédert keressük. Bizonyítható, bogy ez a tetraéder és a súlypontjára tükrözött tetraéder közös része. A bizonyítás megegyezik a háromszögre adott bizonyítással.