

Részletesebben a feladat a következő állítás bizonyítását kívánja: Legyen  $P$  és  $P'$  két pont melyek egymásnak tükörképei a gömbön az  $e$  körre vonatkozóan.  $E$  legyen a gömb egy tetszőleges  $P$ -tól és  $P'$ -től különböző pontja.  $\delta$  az  $E$ -vel átellenes pontban húzott érintősík. Ha a gömböt  $E$ -ből sztereografikus projekcióval vetítjük  $\delta$ -ra, akkor  $P$  és  $P'$  képe egymás tükörképei (inverzei) az  $e$  kör képére nézve.

Adott pontnak adott körre nézve a tükörképét azzal értelmeztük, hogy a ponton keresztül a körre ortogonális köröket rajzoltunk. Az összes ilyen körök második metszéspontja is közös, ezt neveztük az adott pont tükörképének. Hasonlóan értelmeztük a gömbön is egy pont tükörképét egy körre vonatkozóan.

Rajzoljunk tehát  $P$ -n át két  $e$ -re ortogonális kört, ezek metszéspontja adja  $P'$ -t.  $E$ -ből vetítve  $\delta$ -ra  $e$  képe egy  $e_1$  kör lesz. A másik két kör képe  $P$  és  $P'$  képén átmenő kör lesz. Mivel a sztereografikus projekció szögtartó, a két kör ortogonális is lesz  $e_1$ -re, tehát metszéspontjaik definíció szerint egymás tükörképei az  $e_1$  körre nézve.

Ha  $E$ -t az  $e$  körön választjuk, akkor nyilván  $e_1$  egyenes és  $P$  és  $P'$  képe erre vonatkozó közösleges tükörképek.

**Megjegyzés:** Ha  $e$  főkör, akkor az  $e$ -re való tükrözés a gömbön az  $e$  síkjára vonatkozó közösleges tükrözéssel egyezik meg, tehát többek közt körtartó és szögtartó. Ha ezt vetítjük a síkra, akkor is inverzióba megy át a tükrözés. Tudva, hogy a sztereografikus projekció szögtartó és körtartó, ezzel újabb bizonyítást kapjuk annak, hogy az inverzióknak is megvannak ezek a tulajdonságai. Ha most megfordítva a síkban egy inverziót vetítünk vissza a körre, akkor azt is nyerjük, hogy a gömbön tetszőleges körre való tükrözés is körtartó és szögtartó.