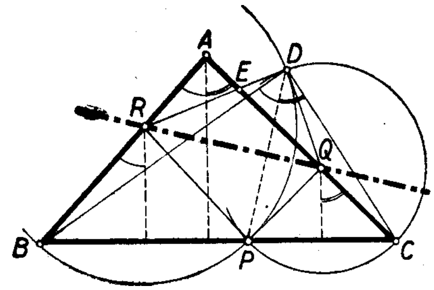
a) (az 1. megoldás általánosítása). A következő old. ábráján feltüntetett jelölésekkel elegendő azt bizonyítani, hogy

$$ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle, \tag{1}$$

mert ez esetben $ABCD$ négyszög húrnégyszög.



A szerkesztésből következik, hogy $BR = RP$ és $PQ = QC$. Másrészt azonban a tükrözés miatt $PR = DR$ és $PQ = DQ$. Ezekből az egyenlőségekből következik, hogy a BRD és a CQD háromszögek most is egyenlőszárúak. A bizonyítandó (1) állítást helyettesíthetjük azzal, hogy e háromszögek csúcsnál fekvő szögeinek, illetve ezek mellékszögeinek egyenlőségét mutatjuk ki, tehát azt, bogy

$$ARD\sphericalangle = AQD\sphericalangle. \tag{2}$$

Tekintsük ismét az ARE és EQD háromszögeket, melyek E-nél fekvő szögei csúcsszögek s így (2) állításunk igazolására harmadik szögük egyenlőségét kell kimutatnunk:

$$RDQ\sphericalangle = RAQ\sphericalangle.$$

Ezek közül a baloldali szög $RDQ\sphericalangle = RPQ\sphericalangle$ a tükrözés folytán, míg a jobboldali benne van az $ABC\triangle$-ben, eszerint

$$RAQ\sphericalangle + QCP\sphericalangle + PBR\sphericalangle = 180^\circ$$

A $CPQ\triangle$ és $BPR\triangle$ tükrösségéből következik, hogy

$$QCP\sphericalangle = QPC\sphericalangle \qquad \text{és} \qquad DBR\sphericalangle = BPR\sphericalangle,$$

tehát $RAQ\sphericalangle$-et a $QPC\sphericalangle$ és $BPR\sphericalangle$-ek összege 180°-ra egészíti ki, ebből következik, hogy

$$RAQ\sphericalangle = RPQ\sphericalangle,$$

ami éppen bizonyítandó volt.

A második megoldás nem általánosítható, mert egyrészt azt használja ki, hogy $ABC\sphericalangle = ACB\sphericalangle$, másrészt azt, hogy $ARQD$ szimmetrikus trapéz.

b.) (a 3. megoldás általánosítása). Éppen úgy, mint a speciális esetben, itt is a C, P és D pontokon áthaladó kör középpontja Q, a B, P és D pontokon áthaladóé: R.

Ismét alkalmazva a kerületi szögek tételét

$$CDP\sphericalangle = \frac{1}{2}\,CQP\sphericalangle$$

és

$$PDB\sphericalangle = \frac{1}{2}\,PRB\sphericalangle.$$

Adjuk össze a két egyenlőséget:

$$CDB\sphericalangle = \frac{1}{2}\,(CQP\sphericalangle + PRB\sphericalangle) = \frac{1}{2}\left[(180^\circ - 2QCP\sphericalangle) + (180^\circ - 2RBP\sphericalangle)\right] =$$
$$= 180^\circ - QCP\sphericalangle - RBP\sphericalangle = BAC\sphericalangle,$$

és így A és D ugyanazon a B és C pontokon áthaladó köríven van.

A 4. megoldás nem általánosítható, már a szimmetrikus trapéz felhasználása miatt sem.