Ez a feladat hasonló az 1. számban közölt „Mi is a teljes indukció?” című cikk 8. feladatához, csak ott φ helyett is α áll, és nem cosinusokat, hanem sinusokat összegeztünk. Hasonlóan is bizonyíthatjuk az azonosságot, mint annál a feladatnál tettük.

I. Megoldás: Bizonyíthatjuk az állítást teljes indukcióval. Jelöljük a baloldali összeget C_n-nel.

Ha $n = 1$, $C_1 = \cos\alpha$, és a jobboldalon is $\cos\alpha$ áll, vagyis $n = 1$ esetben az állítás igaz.

Tegyük fel most valamely k-ra már igazoltuk az állítást:

$$C_k = \frac{\cos\left(\frac{(k-1)\varphi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}};$$

nézzük meg, igaz marad-e $n = (k + 1)$ esetre is.

$$C_{k+1} = C_k + \cos(k\varphi+\alpha) = \frac{\cos\left(\frac{(k-1)\varphi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{k}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \cos(k\varphi+\alpha) =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{(k-1)\varphi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{k}{2}\varphi + \cos(k\varphi+\alpha)\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(2k-1)\varphi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(2k+1)\varphi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)\varphi}{2}+\alpha\right)\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(2k+1)\varphi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos\left(\frac{k\varphi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{k+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

vagyis az állítás igaz az $n = (k + 1)$ esetre is. Így az állítás minden n-re igaz.

II. Megoldás: Vizsgáljuk mindkét oldalnak a $\sin\frac{\varphi}{2}$-szeresét, tehát azt bizonyítsuk be, hogy $\sin\frac{\varphi}{2}C_n = \cos\left(\frac{(n-1)\varphi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{n}{2}\varphi$.

A baloldalon csupa ilyen tagot kapunk:

$$\sin\frac{\varphi}{2}\cos(k\varphi+\alpha) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(2k+1)}{2}\varphi+\alpha\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)\varphi}{2}+\alpha\right)\right]$$

és így,

$$\sin\frac{\varphi}{2}C_n = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\varphi}{2}+\alpha\right) - \right.$$

$$- \sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(2n-3)\varphi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{(2n-5)\varphi}{2}+\alpha\right) +$$

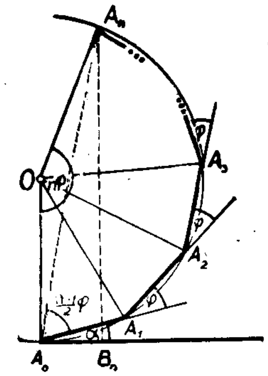
$$\left. + \sin\left(\frac{(2n-1)\varphi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\frac{(2n-3)\varphi}{2}+\alpha\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{(2n-1)\varphi}{2}+\alpha\right) - \sin\left(\alpha-\frac{\varphi}{2}\right)\right] = \cos\left(\frac{(n-1)\varphi}{2}+\alpha\right)\sin\frac{n}{2}\varphi.$$

Ezzel a bizonyítandó összefüggést nyertük.

III. Megoldás: Az összeg könnyen szemléltethető geometriailag is. Húzzunk egy egyenest és rajzoljunk ennek egy A_0 pontjából az egyenessel α szöget bezáró egységnyi hosszúságú A_0A_1 szakaszt. E szakasz vetülete az egyenesen

$\cos\alpha$, és A_1 távolsága az egyenestől $\sin\alpha$. Most az A_1 pontból rajzoljunk az A_0A_1 egyenessel φ szöget bezáró egységnyi hosszúságú szakaszt. Ennek az eredeti egyenes irányával bezárt szöge $\varphi+\alpha$ s így az $A_0A_1A_2$ törtvonal vetülete az egyenesre $\cos\alpha+\cos(\varphi+\alpha)$, A_2 távolsága az egyenestől pedig $\sin\alpha+\sin(\varphi+\alpha)$.



Ezt most n-szer ismételve kapunk egy $A_0A_1A_2\dots A_n$ törtvonalat, mely egységnyi hosszúságú szakaszokból van összetéve, és két szomszédos szakasz közti szög $\pi-\varphi$. Legyen A_n vetülete az egyenesen B_n akkor

$$A_0B_0=\cos\alpha+\cos(\varphi+\alpha)+\ldots+\cos\big((n-1)\varphi+\alpha\big)=C_n,$$
$$A_nB_n=\sin\alpha+\sin(\varphi+\alpha)+\ldots+\sin\big((n-1)\varphi+\alpha\big)=S_n.$$

A keletkező törtvonal csúcsain át kör fektethető. Húzzuk meg ugyanis a szomszédos szakaszok közti szög felezőit is. Húzzunk a kezdő és végpontban is az első, illetve az utolsó szakasszal $\dfrac{\pi-\varphi}{2}$ nagyságú szöget bezáró egyeneseket. Ekkor minden szakasz fölé egybevágó egyenlőszárú háromszögeket szerkesztettünk. A szomszédosaknak egy-egy szára közös s így az összesek csúcsa egy közös O pontba kell, hogy essék.

Ezt tudva már nem nehéz a meghatározandó C_n és S_n összeget ábrázoló A_0B_n és A_nB_n távolságokat kiszámítani. Az $A_0B_nA_n\triangle$-ből $A_0B_n=A_0A_n\cos B_nA_0A_n\sphericalangle$ és $A_nB_n=A_0A_n\sin B_nA_0A_n\sphericalangle$.
Az $A_0OA_n\triangle$-ből $A_0A_n=2A_0O\sin\dfrac{A_0OA_n\sphericalangle}{2}$.

Így a $B_nA_0A_n$ szöget, a kör A_0O sugarát és az A_0OA_n középponti szöget kell meghatároznunk. Ezek közül az utolsó n egybevágó egyenlőszárú háromszög szögeiből tevődik össze. Mivel az alapnál fekvő szögek mindegyike $\dfrac{\pi-\varphi}{2}$, így vele szemben φ nagyságú szög van, amiből $A_0OA_n\sphericalangle=n\varphi$.

Az egyenlőszárú háromszögek alapja egységnyi hosszúságú, így azt kapjuk, hogy

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{A_0O},\ \text{tehát}\ A_0O=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Végül szerkesztés szerint $B_nA_0A_1\sphericalangle=\alpha$ az $A_1A_0A_n\sphericalangle$ pedig mint kerületi szög az $A_1OA_n\sphericalangle$ fele. Az előbbi meggondolás szerint utóbbi szög $(n-1)\varphi$ tehát $B_nA_0A_n\sphericalangle=\dfrac{n-1}{2}\varphi+\alpha$.
Így

$$\cos\alpha+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(2\varphi+\alpha)+\ldots+\cos\big[(n-1)\varphi+\alpha\big]=A_0B_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\cos\left[\frac{n-1}{2}\varphi+\alpha\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

és ezt kellett bizonyítanunk; továbbá

$$\sin\alpha+\sin(\varphi+\alpha)+\sin(2\varphi+\alpha)+\ldots+\sin\big[(n-1)\varphi+\alpha\big]=A_nB_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\sin\left[\frac{n-1}{2}\varphi+\alpha\right]}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Utóbbiban α helyébe φ-t írva a már ismert eredményt kapjuk vissza.