I. Megoldás: Elég a kifejezést pozitív értékekre vizsgálni, mert ha $x<0$, akkor $k\sqrt{x^2+a^2}-x>k\sqrt{a^2+x^2}-|x|=k\sqrt{a^2+|x|^2}-|x|$, ez pedig a kifejezés értéke az $|x|$ helyen. Legyen tehát $x>0$ és jelöljük l-lel a $k\sqrt{a^2+x^2}-x$ kifejezés legkisebb értékét, ami biztosan pozitív. Ekkor

$$k\sqrt{a^2+x^2}\geq x+l>0$$

s így

$$k^2a^2+k^2x^2\geq x^2+2lx+l^2$$
$$\left(k^2-1\right)x^2-2lx+k^2a^2-l^2\geq 0$$

és $k^2-1>0$ folytán oszthatunk k^2-1-gyel

(1) $$x^2-2\frac{l}{k^2-1}x+\frac{a^2k^2-l^2}{k^2-1}=\left(x-\frac{l}{k^2-1}\right)^2+\frac{\left(a^2k^2-l^2\right)\left(k^2-1\right)-l^2}{\left(k^2-1\right)^2}\geq 0.$$

Mivel itt l a függvény legkisebb elért értéke, ez csak úgy lehet, ha

$$\left(a^2k^2-l^2\right)\left(k^2-1\right)-l^2=k^2\left(a^2k^2-l^2-a^2\right)=0$$

azaz

$$l^2=a^2\left(k^2-1\right)$$
$$l=a\sqrt{k^2-1}$$

és ekkor ahol a függvény eléri ezt a minimumot, ott az (1) kifejezés is 0. Ilyen x érték egy van:

$$x=\frac{l}{k^2-1}=\frac{a}{\sqrt{k^2-1}}.$$

II. Megoldás: A feladatot geometriai úton is meg lehet oldani. Ismét elég pozitív x-ekre szorítkozni. Ekkor $\sqrt{a^2+x^2}$ egy olyan derékszögű háromszög átfogóját jelenti, melynek befogói a és x hosszúságúak. Legyen az x oldal mellett fekvő szög α, akkor $x=\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$ és $\sqrt{a^2+x^2}=\frac{a}{\sin\alpha}$. Célszerű lesz k helyett is trigonometriai kifejezést keresni. Tekintve, hogy $k>1$, van egy olyan φ hegyes szög, melyre $k=\frac{1}{\cos\varphi}$ mivel $k\neq 1$, $\varphi>0$, ekkor a függvény így írható át:

$$f(x)=\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{a}{\sin\alpha}-\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}=a\left(\frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)=a\left(\frac{1-\cos\alpha\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\varphi}\right).$$

Vonjunk ki és adjunk hozzá a függvényhez $a\cdot\operatorname{tg}\varphi$-t:

$$f(x)=a\left(\frac{1-\cos\alpha\cos\varphi}{\sin\alpha\cos\varphi}-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}+\operatorname{tg}\varphi\right)=$$

$$=a\left(\frac{1-(\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi)}{\sin\alpha\cos\varphi}+\operatorname{tg}\varphi\right)=a\left(\frac{1-\cos(\alpha-\varphi)}{\sin\alpha\cos\varphi}+\operatorname{tg}\varphi\right).$$

A függvény értéke akkor lesz minimális, ha az első tag 0, vagyis, ha $\cos(\alpha-\varphi)=1$ és így $\alpha=\varphi$, tehát $x=\frac{a}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{a}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}-1}}=\frac{a}{\sqrt{k^2-1}}$
és a minimális érték

$$a\operatorname{tg}\varphi=a\sqrt{k^2-1}.$$