

I. megoldás: A Kürschák-verseny 3. feladatának I. megoldásában láttuk; hogy egymásutáni természetes számok összegének van 1-nél nagyobb páratlan osztója. Másrészt egy $(2k + 1)n$ -alakú szám, ahol k és n természetes számok, felírható az $n - k$ -től $n + k$ -ig terjedő számok összegeként. Ha itt $k < n$ (tehát n legalább 2), akkor ezek mind pozitívok és számuk $2k + 1$, ami legalább is három. Ha $k \geq n$ és így negatív számmal kezdődne a sor, akkor a negatív tagokat és a velük abszolút értékben megegyező pozitív tagokat, továbbá a 0-t, tehát $-(k - n)$ -től $k - n$ -ig a számokat elhagyva kaphatunk természetesen számokból álló sort: $k - n + 1$ -től $k + n$ -ig a számokat. Ezek száma $2n$; tehát n -nek legalább 2-nek kell lennie, hogy legalább 3 tag visszamaradjon. Így azt kaptuk, hogy a páratlan valódi osztóval bíró számok előállíthatók 3 vagy több egymásutánt természetes szám összegeként.

Viszont más számok nem rendelkezhetnek ezzel a tulajdonsággal, mert 3 vagy több egymásutáni szám összege osztható a tagok számával, vagy annak felével és az első és utolsó tag összegével, vagy annak felével. Itt mindkét tényező 1-nél nagyobb. Így 2 hatványain kívül a prímszámok nem írhatók 3 vagy több természetes szám összegeként, minden más szám igen.

II. megoldás: A Kürschák-verseny 3. feladatának II. megoldásából is azonnal leolvasható az előzőkben nyert eredmény. Ott azt találtuk, hogy azok a számok bonthatók egymás utáni természetes számok összegére, melyek kétszerese egy páros és egy páratlan valódi osztó szorzatára bontható. A kisebbik tényező jelentette a tagok számát.

Ha most a tagok száma legalább 3, akkor még e szorzat fele, tehát a kérdéses szám is két valódi osztó szorzatára bontható, melyek közül legalább az egyik páratlan. Ebből következik az előbbi eredmény.

III. megoldás: Szó szerint vihető át a Kürschák-verseny 3. feladatának III. megoldása is, azzal a különbséggel, hogy most a rácspon-t-paralelogrammánk rövidebb oldalán is legalább 3 rácspon-tnak kell lennie, tehát a kérdéses szám kétszeresének két olyan tényezőre kell bomlania, melyek egyike páratlan, és legalább 3, a másika páros s így legalább 4, amiből ismét következik a bizonyítandó állítás.