Jelöljük az $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ kifejezést $a_n$-nel. Nyilvánvaló (mint azt a Csebysev-tétel 13. feladatának megoldásánál – K. M. L. 1950. 10. 206. oldal – is láttuk), hogyha bizonyos $n$-re $a_n < 1/4^2$, illetőleg $a_n < 1/4^3$, úgy ez minden $n$-nél nagyobb indexre is igaz, hiszen $a_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}a_n < a_n$.

Tehát elég azt a legkisebb $n$-et keresni, melyre ez igaz. Kérdés, lehet-e egyáltalán $n$-et olyan nagyra választani, hogy ez teljesüljön. Megmutatjuk, hogy ez lehetséges.

$$a_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{4^n}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots(2n)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n 1\cdot 2\cdot 3\ldots n} = \frac{1}{2^n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n} =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\ldots\frac{2n-1}{2n} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2n}\right).$$

Mivel $(1-x)(1+x) < 1$, így kapjuk, hogy

$$a_n < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2n}\right)} <$$
$$< \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}} = \frac{2}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}. \tag{1}$$

(A nevezőt ugyanis kisebbítjük azáltal, hogy a zárójelek beszorzásánál a részletszorzatok egyrészét elhagyjuk.)

De tudjuk, hogy az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ sor összege tetszőlegesen nagy lehet, ha $n$-et elég nagynak választjuk. Ez azt jelenti, hogy találhatunk olyan küszöbszámot, melytől kezdve $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} < \frac{1}{4^2}$ és olyant is, melytől $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} < \frac{1}{4^3}$, vagyis olyant, amelytől kezdve $\binom{2n}{n} < 4^{n-2}$ ill. olyant, amelytől kezdve $\binom{2n}{n} < 4^{n-3}$. Ugyanúgy tetszőleges $k$-hoz mindig találni olyan számot, melytől kezdve $\binom{2n}{n} < 4^{n-k}$.

Egy-egy ilyen küszöbszámot meg is tudunk keresni. Olyan $n$-re van szükségünk, melyre (1) nevezőjében szereplő sor összege nagyobb 32-nél, illetve 128-nál. A szokott módon eljárva az

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)$$

összeg minden zárójelében 1/2-nél több van, így az összeg nagyobb, mint, $1+\frac{k}{2}$, vagyis (1) szerint

$$a_{2^k} < \frac{4}{2+k}.$$

Így azt kapjuk, hogy $a_n < \frac{1}{16}$, azaz $\binom{2n}{n} < 4^{n-2}$, ha $n > 2^{62}$ és $\binom{2n}{n} < 4^{n-3}$, ha $n > 2^{254}$. Természetesen távolról sem a legkisebb küszöbszámot kaptuk, hisz lényeges elhanyagolásokat tettünk azért, hogy könnyen áttekinthető egyenlőtlenséget nyerhessünk.