I. megoldás: Számítással nem sok nehézséget ad a feladat megoldása. Általában megmutatjuk, hogy az összes olyan háromszögek közül, melyeknek egyenlő a kerülete és ezen kívül egyenlő a γ szögük, abban lesz az ezzel szemközti c oldal a legkisebb, melyben $\alpha = \beta$. Kifejezzük a kerületet a c oldal segítségével. A sinus-tétel szerint

$$k = a + b + c = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} + c = \frac{c}{\sin\gamma}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) =$$
$$= \frac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\left(2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right).$$

Innen

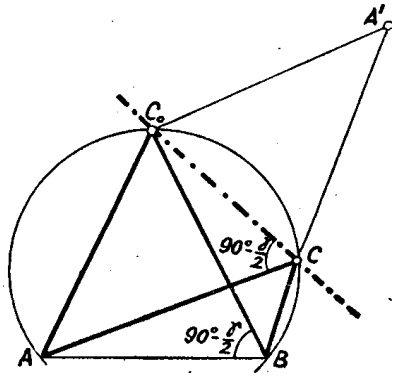
$$c = \frac{k\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}$$

A jobb oldalon csak a nevező első tagja változhat, c akkor a legkisebb, ha ez a tag legnagyobb, tehát ha $\alpha = \beta$.

II. megoldás: Az eredmény olyan egyszerű, hogy érdemes megpróbálni, kevesebb geometriai ismeret felhasználásával, számolás nélkül is bebizonyítani. Eredeti formájában azért nehéz hozzáfogni a kérdéshez, mert az ismert távolság, a kerület három oldalból tevődik össze. Át lehet azonban alakítani a feladatot úgy, hogy egy oldal legyen változatlan.

Az előbbi megoldásban kimondott általánosabb alakjában bizonyítjuk ismét a tételt és ugyanazokat a jelöléseket is használjuk. Vegyünk különböző alakú olyan háromszögeket, melyeknek kerülete és γ szöge egyenlő. Nagyítsuk vagy kicsinyítsük őket úgy, hogy mindegyiknek egyenlő legyen a c oldala. Minél kisebb volt eredetileg a c oldal, annál nagyobb lesz az új háromszög kerülete. A háromszög alakja nem változik. Így most olyan háromszögeket kaptunk, melyekben egyenlő a γ szög és a vele szemben fekvő c oldal. Ezek közül legnagyobb lesz a kerülete annak, amelyiknek eredetileg legkisebb volt a c oldala. Most tehát az előbbi állítás helyett azt kell megmutatnunk, hogy *azon háromszögek közül, melyeknek egyenlő egy szögük és a vele szemben levő oldaluk, az egyenlőszárúnak legnagyobb a kerülete.*

Ha ezeket a háromszögeket közös c oldal fölé rajzoljuk le, akkor a C csúcsok egy köríven feküsznek. Legyen ABC egy tetszőleges e háromszögek közül, ABC_0, pedig az egyenlőszárú.



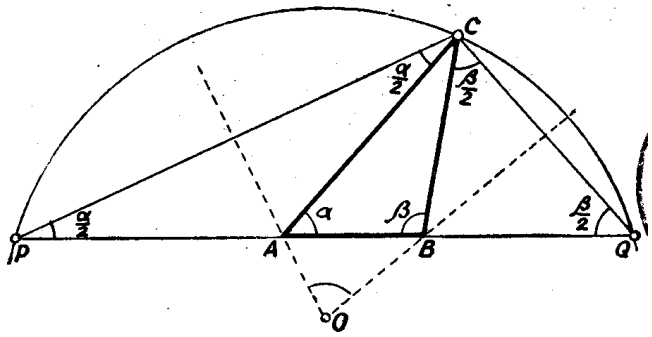
Mivel AB oldaluk közös, azt kell megmutatnunk, hogy $AC_0 + BC_0 > AC + BC$. Legyen C mondjuk a BC_0 félíven. Mérjük AC-t BC-nek C-n túli meghosszabbítására, vagy ami ezzel egyet jelent, tükrözzük AC-t az ABC_Δ C-ben húzott külső szögfelezőjére. A tükörképe legyen A'.

Ez a szögfelező az AC oldallal $\frac{180^\circ - \gamma}{2}$ nagyságú szöget zár be, ugyanakkorát, mint amekkorák az egyenlőszárú háromszög alapján fekvő szögek. Ekkor azonban a szögfelező és a BC_0 szár a körön metszik egymást, vagyis a C-ben húzott szögfelező átmegy a C_0-on is. Így C_0A' az AC_0 tükörképe a CC_0 egyenesre. Ezek szerint

$$AC_0 + C_0B = A'C_0 + C_0B > A'B = A'C + CB = AC + CB.$$

Ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

III. megoldás: Az előző megoldás utat mutat arra is, hogy próbálhatjuk meg átfogalmazás nélkül is tisztán geometriai úton bizonyítani be állításunkat. Mérjük fel az adott PQ kerületet és szerkesszük meg ebből kiindulva a különböző alakú, de egyenlő kerületű és egyenlő nagy γ szöggel rendelkező háromszögeket.



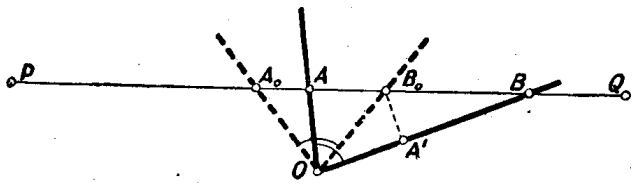
Ha α-t a lehetséges határok közt tetszőlegesen választjuk és megszerkesztjük a hozzá tartozó $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$ szöget, ezekből a háromszög az ismert szellemes módon szerkeszthető, amit az ábra is szemléltet. A C pontot a P és Q-ban $\alpha/2$ és $\beta/2$ szög alatt hajló egyenesek metszéspontja adja, A és B pedig egy PC illetve QC alapú egyenlőszárú háromszög csúcsa.

$$PCQ\sphericalangle = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90° + \frac{\gamma}{2},$$

tehát független, a másik két szög nagyságától. Így az összes háromszög C csúcsa egy P-n és Q-n átmenő köríven fekszik.

Az A és B csúcsot úgy is kijelölhetjük, mint a PC illetve QC szakaszok felező merőlegesének a PQ egyenessel való metszéspontját. Ezeknek a merőlegeseknek a metszéspontja éppen a $PCQ\Delta$ köré irt kör középpontja, tehát az előbb mondottak szerint ugyanaz a pont, akármelyik háromszög megszerkesztéséről van is szó a számba jövők közül. A két merőleges szöge mint a PCQ száraira merőleges szárú szög $90° - \frac{\gamma}{2}$ nagyságú. Így arra az egyszerű eredményre jutottunk, hogy a háromszögek c oldalát egy O középpontú, $90° - \frac{\gamma}{2}$ nagyságú szög vágja ki a PQ szakaszból.

A legkisebb c oldallal bíró háromszög megkereséséhez tehát csak azt kell tudnunk, hogy milyen helyzetben vág ki egy adott nyílású, adott pont körül forgó szög, adott egyenesből a legkisebb szakaszt. Megmutatjuk, hogy akkor, ha a szög helyzete az egyeneshez képest szimmetrikus, vagyis ha két szára egyenlő szöget zár be az adott egyenessel, csak ellenkező irányban. Legyen A_0OB_0 a szimmetrikus helyzetű szög, AOB pedig egy tetszőleges helyzetű, a pontok sorrendje a PQ szakaszon legyen PA_0AB_0BQ.



Állításunk igazolásához azt kell megmutatnunk, hogy $B_0B > A_0A$.

Másoljuk rá az $OA_0A\Delta$-et az OB_0 oldalra. Ekkor OA megfelelője OB-re fog esni. Jelöljük A megfelelőjét A'-vel. Mivel

$$B_0A'B\sphericalangle = A'OB_0\sphericalangle + OB_0A'\sphericalangle > OB_0A'\sphericalangle = OB_0A_0\sphericalangle =$$
$$= B_0OB\sphericalangle + OBB_0\sphericalangle > OBB_0\sphericalangle.$$

így

$$B_0B < B_0A' = A_0A.$$