1. Egy számot ismerünk, melynek két 4-esre végződik a négyzete: $12^2 = 144$. Ha $a^2$ is két 4-esre végződik, akkor a különbségük: $a^2 - 144 = (a+12)(a-12)$ két 0-ra végződik, vagyis osztható 100-zal. Ez csak úgy lehet, ha $a$ páros, továbbá a szorzat osztható 25-tel. Ez viszont elképzelhető úgy is, hogy valamelyik tényező osztható 25-tel, meg úgy is, hogy mindkettő osztható 5-tel. Utóbbi esetben azonban a két tényező összege meg különbsége is osztható volna 5-tel, de ennek a két tényezőnek 24 a különbsége, tehát nem osztható 5-tel. Így csak az előbbi eset lehetséges. $a+12$ páros $a$ mellett akkor osztható 25-tel, ha $a$ 38-ra vagy 88-ra végződik. $a-12$ pedig, akkor, ha $a$ utolsó két jegye 12 vagy 62.

A négyzet utolsó két jegye csak az alap utolsó két jegyétől függ. $38^2 = 1444$, $88^2 = 7744$, $12^2 = 144$, $62^2 = 3844$.

Így minden 12-re, 38-ra, 62-re és 88-ra végződő szám négyzete két 4-esre végződik.

2. Közben találtunk egy három 4-esre végződő számot is, az megint hasonló jó szolgálatokat fog tenni, mint előbb a 12. Ha $b^2$ is három 4-esre végződik, akkor

$$b^2 - 1444 = (b+38)(b-38).$$

osztható $1000 = 8 \cdot 125$-tel. Ebben $b$-nek párosnak kell lennie, mert csak akkor lesznek a tényezők párosak, tehát a szorzat legalábbis 4-gyel osztható. Hogy még 8-cal is osztható legyen, ahhoz valamelyik tényezőnek 4-gyel is oszthatónak kell lennie. Könnyű belátni, hogy ez esetben mind a két tényező 4-gyel osztható.

A szorzatnak ezen kívül 125-tel kell oszthatónak lennie Ez csak úgy lehet, hogy valamelyik tényező külön osztható 125-tel, mert legalább az egyik relatív prím 125-höz. Ha ugyanis két szám mindegyikének van 1-nél nagyobb közös osztója, $125 = 5^3$-nel, akkor ez csak 5 valamelyik hatványa lehet, tehát mind a két szám, s így pl. a különbségük is osztható 5-tel. De esetünkben $(b+38)-(b-38) = 76$ relatív prím 125-höz, tehát legalább az egyik szám szintén relatív prím hozzá.

Azt nyertük tehát, hogy a $b$ négyzete három 4-esre végződik, akkor $b+38$ is $b-38$ is osztható 4-gyel és valamelyikük még 125-tel is. Valamelyik tényező tehát osztható 500-zal, s így az utolsó három számjegye vagy 000, vagy 500. Az első tényező akkor végződhetik így, ha $b$ 962-re vagy 462-re végződik, a második akkor, ha $b$ utolsó három jegye 038 vagy 538. Bármely szám négyzetének utolsó három számjegye csak az alap utolsó bárom számjegyétől függ, mert

$$\begin{aligned}(A \cdot 1000 + B)^2 &= A^2 \cdot 1000^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot 1000 + B^2 = \\ &= (A^2 \cdot 1000 + 2AB) \cdot 1000 + B^2.\end{aligned}$$

Azt kell tehát csak megnéznünk, hogy a talált négy szám négyzete tényleg három 4-esre végződik-e.

$$38^2 = 1444,\ 462^2 = 213444,\ 538^2 = 289444,\ 962^2 = 925444.$$

Ezek szerint a 12-re, 38-ra, 62-re és 88-ra végződő számok négyzetei végződnek két 4-esre és ezek közül a 038-ra, 462-re, 538-ra és 962-re végződő számoké három 4-esre.