

$10 = 2 \cdot 5$  és egy szám annyi 0-ra végződik, ahányadik hatványával osztható 10-nek. 2 és 5 kitevőjét kell tehát megkeresnünk az egyes számok törzstényező felbontásában. Használva az  $n!$  törzstényező felbontásra vonatkozó Legendre-féle azonosságot:

$$\binom{48}{24} = \frac{48!}{(24!)^2} = \frac{2^{24+12+6+3+1} \cdot 3^{16+5+1} \cdot 5^{9+1} \dots}{(2^{12+6+3+1} \cdot 3^{8+2} \cdot 5^4 \dots)^2}.$$

Egyszerűsítés után 2 és 5 kitevője  $\binom{48}{24}$ -ben

$$24 + 12 + 6 + 3 + 1 - 2(12 + 6 + 3 + 1) = 2,$$

illetve

$$9 + 1 - 2 \cdot 4 = 2,$$

tehát  $\binom{48}{24}$  két 0-ra végződik.

$\binom{100}{50}$ -ben 2 és 5 kitevője hasonlóan  $50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 - 2(25 + 12 + 6 + 3 + 1) = 3$ , ill.  $20 + 4 - 2(10 + 2) = 0$ .

$\binom{100}{50}$  tehát nem végződik 0-ra.

$\binom{1000}{488} = \frac{1000!}{488! \cdot 512!}$ -nál egyrészt bonyolultabb a nevező, mint az előzőkben, másrészt pedig a Legendre azonosság alapján is igen hosszadalmas lenne a számítás. Célszerű lesz ezért megnézni először általánosabban, hogy mi egy  $p$  törzsszám kitevője ebben a számban. Jelöljük  $p$  kitevőjét 1000!-ban, 488!-ban és 512!-ban  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$ -val.

$$\alpha = \left[ \frac{1000}{p} \right] + \left[ \frac{1000}{p^2} \right] + \dots + \left[ \frac{1000}{p^k} \right], \quad \text{ahol } p^{k+1} > 1000,$$

$$\beta = \left[ \frac{488}{p} \right] + \left[ \frac{488}{p^2} \right] + \dots + \left[ \frac{488}{p^k} \right]$$

és

$$\gamma = \left[ \frac{512}{p} \right] + \left[ \frac{512}{p^2} \right] + \dots + \left[ \frac{512}{p^k} \right].$$

$p$  kitevője  $\binom{1000}{488}$ -ban

$$\begin{aligned} \alpha - \beta - \gamma &= \left( \left[ \frac{1000}{p} \right] - \left[ \frac{488}{p} \right] - \left[ \frac{512}{p} \right] \right) + \\ &+ \left( \left[ \frac{1000}{p^2} \right] - \left[ \frac{488}{p^2} \right] - \left[ \frac{512}{p^2} \right] \right) + \dots + \left( \left[ \frac{1000}{p^k} \right] - \left[ \frac{488}{p^k} \right] - \left[ \frac{512}{p^k} \right] \right). \end{aligned}$$

Itt a 154. feladat állítása szerint minden zárójelben 0, vagy 1 áll, azt kell tehát csak eldöntenünk tagról-tagra, hogy melyik eset áll fenn.  $p = 2$ -re például minden tag 0, s így  $\binom{1000}{488}$  páratlan, nem végződhet 0-ra. (5-re fog végződni, mert 5 kitevőjében a lehetséges négy tagból egy sem hiányzik.)

Hasonlóan számolva a további kifejezéseknél azt kapjuk, hogy  $\binom{1000}{500}$  2-nek a hatodik, 5-nek az első hatványát tartalmazza, tehát egy 0-ra végződik.

$\binom{126}{63}$  2-nek hatodik hatványával osztható, 5-nek harmadik hatványával tehát három 0-ra végződik.

$\binom{128}{64} = \frac{127 \cdot 128}{64 \cdot 64} \binom{126}{63} = \frac{127}{25} \binom{126}{63}$ , tehát 5-nek ugyanazon hatványával osztható, mint az előbbi, 2-nek azonban csak az első hatványával. Így ez egy 0-ra végződik.