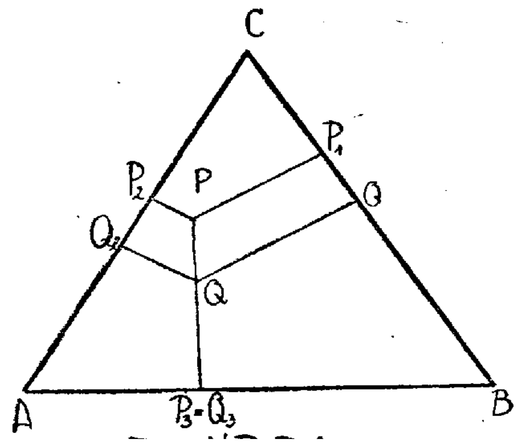
I. megoldás. Mozdítsuk el P-t pl. az AB oldalra merőleges irányban egy Q pontba. Legyenek ennek vetületei az oldalakra Q_1, Q_2, Q_3 (51. ábra).



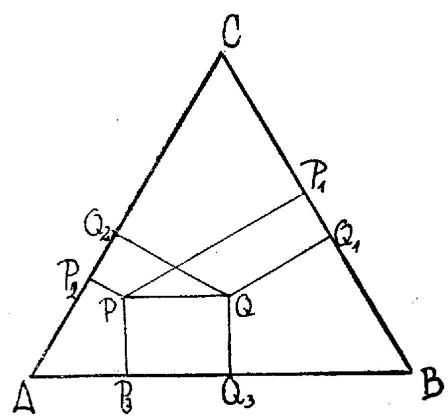
51. ábra

$Q_3 = P_3$, tehát AP_3 változatlan marad. P_1Q_1 és P_2Q_2 közül egyik növeli, a másik csökkenti az összeget. De ez a két szakasz egyenlő, mert a PQ szakasz vetületei a BC és AC oldalakra, a PQ egyenes iránya pedig mindkét oldallal 30°-os szöget zár be.

Egy ilyen eltolásnál tehát nem változik a vizsgált távolságösszeg. Egy pontból a másikba azonban mindig el tudunk jutni, csak a háromszög oldalaira merőleges irányokba haladva, így bármely pontban ugyanakkora a vetületösszeg. A pontot az egyik csúcsba víve látjuk, bogy értéke mindig a fél kerület.

Károlyházy Frigyes (Bp., piar. gimn. VIII. o.)

II. megoldás. Mozdítsuk el pl. az AB oldallal párhuzamosan a P pontot egy Q helyzetbe. Q vetületei az oldalakra Q_1, Q_2, Q_3. (52. ábra).

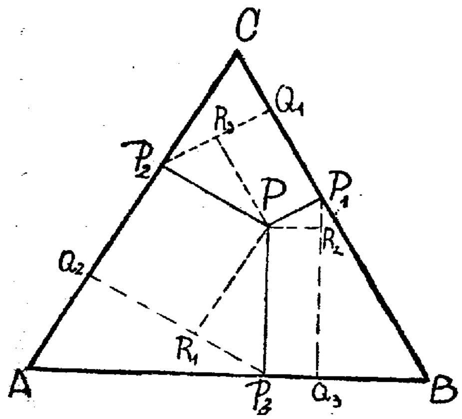


52. ábra

P_1Q_1 és P_2Q_2 mindkettő növeli, vagy mindkettő csökkenti az összeget, P_3Q_3 azonban ép ellenkező értelemben változtatja. $P_3Q_3 = PQ$, továbbá $P_1Q_1 = P_2Q_2$, mert PQ iránya az AB és BC oldalakéval egyformán 60°-os szöget zár be. Legyen Q vetülete PP_1-en (vagy a meghosszabbításán) R, ekkor a PQR derékszögű háromszögben QR-rel szemben 30°-os szög fekszik s így $QR(= Q_1P_1) = {}^1/_2PQ$. Így $P_1Q_1 + P_2Q_2 = PQ$, tehát az összeget ugyanannyival növeltük, mint csökkentettük.

Mivel minden pontból bármelyikbe el lehet jutni az oldalakkal párhuzamos utakon is, tehát tételünk igaznak bizonyult.

III. megoldás. Legyen a P_1 ből AB-re emelt merőleges talppontja Q_3 a P_2-ből BC-re emelt merőlegesé Q_1 a P_3-ból AC-re emelt merőlegesé Q_2; P-ből P_3Q_2, P_1Q_3, P_2Q_1-re emelt merőlegeseké R_1, R_2, R_3. (53. ábra).



53. ábra

Ekkor $\sqrt{3}BP_1/2 = P_1Q_3 = Q_3R_2 + P_1R_2 = PP_3 + PP_1/2$,
hasonlóan $\sqrt{3}CP_2/2 = PP_1 + PP_2/2$ és $\sqrt{3}AP_3/2 = PP_2 + PP_3/2$.
Ezeket összeadva:

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}/2)(BP_1 + CP_2 + AP_3) &= PP_1 + PP_2 + PP_3 + (PP_1 + PP_2 + PP_3)/2\\ &= \frac{3}{2}(PP_1 + PP_2 + PP_3) = (3/2)(\sqrt{3}/2)a\\ \text{vagyis}\quad BP_1 + CP_2 + AP_3 &= \frac{3}{2}a.\end{aligned}$$

Gacsályi Sándor (Debreceni gyak. gimn. VIII. o.)