Legyen az $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ egyenletben $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ egész szám és $x_1 = \dfrac{p}{q}$ legyen az egyenlet egy racionális gyöke legrövidebb alakjában, tehát p és q relatív prím egész számok.

$$a_n \cdot \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

q^n-nel szorozva az egyenletet:

$$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1} \cdot q + \ldots + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0.$$

Ebből egyrészt: $a_np^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0q^{n-1})$, másrészt: $a_0q^n = -p(a_np^{n-1} + + \ldots + a_1q^{n-1})$, vagyis a_np^n osztható q-val és a_0q^n osztható p-vel, de p és q relatív prím számok, tehát p és q^n, továbbá p^n és q is. Ezért a_n q-val és a_0 p-vel osztható, vagyis *csak olyan törtek lehetnek gyökei egy egész együtthatós egyenletnek, melyek számlálója a konstans tagnak, nevezője pedig a legmagasabb fokú tag együtthatójának osztója.* Ez egy-egy egyenlet esetén véges számú lehetőséget jelent. Ezt a véges számú racionális számot kipróbálva eldönthetjük, hogy van-e racionális gyöke egy egész együtthatós egyenletnek és ha igen, úgy megkereshetjük. Egész gyökök is szerepelnek ezek közt, ha $q = 1$, tehát egy egész együtthatós egyenlet egész gyökei csak a konstans tag osztói között keresendők.

Ha a legmagasabb együttható az egyenletben 1, akkor csak $q = 1$ lehet, tehát az ilyen egyenletnek más racionális gyöke, mint egész gyöke, nem lehet.

Így első egyenletünknek a racionális gyöke csak egész szám lehet, és pedig: ±1, ±2, ±5, ±10. Ezek közül $x_1 = 1$ és $x_2 = -2$ gyöke is az egyenletnek. A hozzájuk tartozó $(x-1)\cdot(x+2) = x^2 + x - 2$ gyöktényező szorzattal osztva, a további gyökök az $x^4 - 4x^2 + 15 = 0$ egyenletnek is gyökei. Ennek már racionális gyöke nincs. Az egyenlet másodfokúra visszavezethető. Gyökei:

$$x_{3,4} = \pm\sqrt{2+i}, \quad x_{5,6} = \pm\sqrt{2-i}.$$

A második egyenletet $(3x-1)x(3x+1) = -30$ alakban írva látható, hogy ha x racionális, nevezője csak 1, vagy három lehet, mert különben sem $3x-1$, sem $3x+1$ számlálója nem osztható a nevezővel, tehát a baloldal tört lenne. Az egyenletet $(3x-1)(3x)(3x+1) = -90$ alakban írva a baloldal minden tényezője egész, tehát 90-et három szomszédos szám szorzatára kellene bontanunk, ami lehetetlen. Racionális gyök tehát nincs.

A Cardano-féle formula

$$x = -\varrho\ \sqrt[3]{\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{1}{19683}}} + \varrho^2\ \sqrt[3]{\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{1}{19683}} - \frac{5}{3}}$$

alakban adja a gyököket, ahol $\varrho = 1,\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ lehet, ahonnan a valós gyökre $1,48\ldots$ adódik. A másik két gyöke konjugált komplex számok adódnak.