I. Megoldás: A 126. feladat szerint, ha egy n-ed fokú egyenlet egy x_1 gyökét ismerjük, felírhatunk egy $(n-1)$-ed fokú egyenletet, melynek az egyenlet összes x_1-től különböző gyöke gyöke lesz. Ezt ismételve, két gyök ismerete esetén $n-2$-ed fokú, stb., ha $n-1$ gyököt ismerünk, olyan elsőfokú egyenletet kapunk, melynek eleget tesz az egyenletnek az első $n-1$-től különböző minden gyöke. De az elsőfokú egyenletnek egyetlen gyöke van. Ez tehát ez esetben az eredeti egyenlet n-edik darab gyöke és több gyök nem lehetséges.

Bognár János (Bp.-i Evangélikus gimn. VI. o.)

II. Megoldás: A 126. feladat szerint, ha a $\varphi_n(x)=0$ n-ed fokú egyenletnek x_1 egy gyöke, akkor $\varphi_n(x)=(x-x_1)\cdot\varphi_{n-1}(x)$, ahol $\varphi_n(x)=0$-nak minden x_1-től különböző gyöke gyöke a $\varphi_{n-1}(x)=0$ $n-1$-ed fokú egyenletnek is. Ha van egy második x_2 gyök, akkor ugyanezt alkalmazva az x_2 gyökre, s a $\varphi_{n-1}(x)$ polinomra:
$\varphi_{n-1}(x)=(x-x_2)\varphi_{n-2}(x),\ldots$. Ha van az egyenletnek n különböző gyöke, akkor az eljárást az n gyökre ismételve, végül:

$$\begin{aligned}&\varphi_2(x)=(x-x_{n-1})\varphi_1(x)\text{ és}\\&\varphi_1(x)=a(x-x_n).\end{aligned}$$

Ezekből: $\varphi_n(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_n)$, tehát az n-ed fokú egyenlet baloldala azonosan egyenlő n elsőfokú gyöktényező szorzatával. Most bebizonyítom, hogy több gyök nem lehet. Tegyük fel, hogy az n-ed fokú egyenletnek az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ n-számú gyökén kívül van még egy X gyöke. Ha ezt behelyettesítem:

$$\varphi_n(x)=a(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\ldots(X-n).$$

Ezen egyenlet baloldala a feltevés szerint 0, viszont a jobboldal nem lehet 0, mert a másik feltevés szerint $X\neq x_1$, $X\neq x_2,\ \ldots,\ X\neq x_n$. A feltevés lehetetlensége be van bizonyítva.

Párkány Mihály (Békéscsabai gimn. VIII. o.)

Megjegyzés: Amint látjuk, a gyöktényező kiemelése igen hasznos eszköz egyenletekre vonatkozó kérdésekben, ha van az egyenletnek gyöke. Hogy van-e, az attól is függ, hogy milyen számokat engedünk meg gyökök gyanánt. A pozitív számok körében még nem is minden elsőfokú egyenletnek van megoldása. De másodfokúnak már az összes valós számok közül sem mindig akad gyöke. Annál meglepőbb volt Gauss felfedezése, hogy a komplex számok körében már minden egyenletnek van legalább egy gyöke. A tétel úgy igaz, hogy közben az egyenletben előfordult együtthatók is tetszőleges komplex számok lehetnek. Gauss maga a tételre 6 különböző bizonyítást adott. Ez is mutatja a tétel fontosságát. Ezt a tételt szokás az algebra alaptételének nevezni. A bizonyításhoz természetesen alaposan kell ismerni a komplex számokat.

Ennek a tételnek segítségével az is következik, hogy minden n-ed fokú polinom felbontható n gyöktényező szorzatára. Legyen ugyanis $f(x)$ n-ed fokú polinom. $f(x)=0$-nak van gyöke. Legyen ez x_1. Ekkor $f(x)=(x-x_1)\cdot f_1(x)$, ahol $f_1(x)$ $n-1$-ed fokú polinom. $f_1(x)=0$-nak ismét van legalább egy gyöke, x_2 és $f_1(x)=(x-x_2)f_2(x)$, tehát $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)f(x_2)$. Ezt egész addig folytathatjuk, míg az utolsó gyöktényező kiemelése után konstans hányados marad. Ez épp az n-edik gyöktényezőnél következik be, tehát:

$$f(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

A gyöktényezők közt lehetnek egyenlők is. Ha mind különböző, akkor pont n gyöke van az egyenletnek. De könnyű – és célszerű – úgy számlálni össze a gyököket, hogy mindig n gyöke legyen az n-ed fokú egyenletnek. Számítsunk minden gyököt annyiszor, ahány gyöktényezőben előfordul. Pl. $x^6-3x^4+3x^2-1=0$ egyenlet bal oldala így írható: $(x^2-1)^3=(x-1)^3(x+1)^3$, tehát az egyenlet két különböző gyöke: $+1$ és -1 háromszoros gyökök. Ezt a „3"-at a gyök *multiplicitás*ának nevezzük. *Ha tehát minden gyököt annyiszorosan számolunk, amennyi a multiplicitása, akkor n-ed fokú egyenletnek n gyöke van.*

Szerk.