I. Megoldás: 1° Jelöljünk egy polinomot $f(x)$-szel, bebizonyítjuk, hogy *ha* x_1, *megoldása az* $f(x)=0$ *egyenletnek, akkor* $f(x)$ *osztható az* $x-x_1$ *kifejezéssel* (az ú. n. x_1-hez tartozó „gyöktényező”-vel.) A hányados eggyel alacsonyabb fokú polinom lesz.

Legyen $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+px+r$. Helyettesítsük be x_1-et:

$$ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}+\ldots+px_1+r=0.$$

Ezt levonva $f(x)$-ből, annak értéke nem változik:

$$f(x)=f(x)-f(x_1)=a(x^n-x_1^n)+b(x^{n-1}-x_1^{n-1})+c(x^{n-2}-x_1^{n-2}+ \\ +\ldots+p(x-x_1)$$

Ennek a kifejezésnek minden tagja osztható $x-x_1$-gyel és, a hányados mindig eggyel alacsonyabb fokszámú polinom, mert

$$x^k-x_1^k=(x-x_1)(x^{k-1}+x^{k-2}+x_1+\ldots+xx_1^{k-2}+x_1^{k-1})$$

Így valóban $f(x)=(x-x_1)g(x)$, ahol $g(x)$ az $f(x)$-nél eggyel alacsonyabb fokú polinom.

2° Az $f(x)=0$ egyenletnek minden x_1-től különböző gyöke, gyöke az eggyel alacsonyabb fokú $g(x)=0$ egyenletnek is. Legyen ugyanis $\varkappa\neq x_1$ gyöke az egyenletnek. $f(\varkappa)=(\varkappa-x_1)\cdot g(\varkappa)$. Itt a bal oldal 0, a jobb oldal első tényezője viszont nem az, tehát kell, hogy $g(\varkappa)=0$ legyen.

Párkány Mihály (Békéscsaba, VIII. o.)

II. Megoldás: A gyöktényezőre vonatkozó 1° alatti tétel másképp is bizonyítható.

Írjuk $f(x)$-ben x helyébe a vele egyenlő $[(x-x_1)+x_1]$ kifejezést és rendezzük a polinomot $(x-x_1)$ hatványai szerint:

$$f(x)=a[(x-x_1)+x_1]^n+b[(x-x_1)+x_1]^{n-1}+c[(x-x_1)+x_1]^{n-2}+ \\ +\ldots+p[(x-x_1)+x_1]+r=(x-x_1)g(x)+ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}+ \\ +\ldots+px_1+r=(x-x_1)g(x)+f(x_1)=(x-x_1)g(x),$$

ahol $(x-x_1)g(x)$ az összes $(x-x_1)$-et tartalmazó tagok összege $g(x)$ egy $n-1$-ed fokú polinom.

Róna Péter (Bp.-i Evangélikus gimn. VIII/b. o.)