a) A 7-tel való oszthatósághoz legalább 7-ed fokúnak kell lennie a polinomnak. Feltehetjük, hogy a polinomban egyáltalán nem fordul elő 7-tel osztható együttható, mert az ilyen tagokat mint fentebb is tettük, elhagyhatjuk. Feltétel szerint marad tagja a polinomnak. Elég megmutatni, hogy 6-od fokú nem felelhet meg a feltételeteknek, mert ha mondjuk egy negyedfokú polinom osztható volna minden egész x értékre 7-tel anélkül, hogy volna benne 7-tel osztható együttható, akkor a polinom x^2-szerese is kielégítené ezt a feltételt és az már 6-od fokú volna. Így ha 6-od fokú nem lehet, akkor alacsonyabb fokú sem.

Legyen $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$ olyan hatodfokú polinom, melyben a tényleg szereplő együtthatók nem oszthatók 7-tel és a polinom értéke minden egész x értékre osztható 7-tel. Ekkor a minden esetre 7-tel nem osztható egész szám, különben a polinom nem volna valójában 6-od fokú. Megmutatjuk, hogy ez lehetetlen. Ez esetben ugyanis az $x=-3$, -2, -1, 0, 1, 2, 3 helyeken is 7-tel osztható volna a polinom értéke,
vagyis a

$$\begin{aligned}
&729\,a-243\,b+81\,c-27\,d+9\,e-3\,f+g,\\
&64\,a-32\,b+16\,c-8\,d+4\,e-2\,f+g,\\
&a-b+c-d+e-f+g,\\
&g,\\
&a+b+c+d+e+f+g,\\
&64\,a+32\,b+16\,c+8\,d+4\,e+2\,f+g,\\
\text{és }\ &729\,a+243\,b+81\,c+27\,d+9\,e+3\,f+g.
\end{aligned}$$

számok mindegyike is és így az összegük: $1588\,a+196\,c+28\,e++7\,g=7\cdot(227\,a+28\,c+4\,e+g)-a$ is 7-tel osztható kell hogy legyen, tehát külön a is. Ez azonban lehetetlen a mondottak szerint, tehát nincs hetediknél alacsonyabb fokú polinom, mely eleget tenne a feltételeknek.

b) 12-vel való oszthatósághoz legalább 4-ed fokú polinom szükséges. Ha volna alacsonyabb fokú, azt írhatjuk 3-ad fokúnak, 0 együtthatókat is megengedve. Legyen ax^3+bx^2+cx+d minden egész x-re 12-vel osztható, akkor $x=0$-t téve d 12-vel osztható s így elhagyható. Marad $x(ax^2+bx+c)$. $x=1$, -1 helyettesítésekkel $a+b+c$ és $-a+b-c$ is osztható kell, hogy legyen 12-vel, tehát összegük is különbségük is, vagyis b és $a+c$ 6-tal osztható. Tegyünk x helyett 2-t, akkor a második tényező $4a+2b+c$ 6-tal osztható kell, hogy legyen, tehát c s így a is páros, minden együttható 2-vel osztható, amit éppen kizártunk.

Elég jól oldotta meg: Gacsányi S., Kővári T.

Megjegyzés: A megoldás első részében nyertük, hogy ha x egész, akkor $7|x^7-x=x(x^6-1)$. (Függőleges vonallal az oszthatóságot szokás jelölni, tehát $7|49$ olvasd: 49 osztható 7-tel. Az ellentétét a vonal áthuzásával jelöljük: $7\nmid 36$ olvasd: 36 nem osztható 7-tel.) Ez azonban csak úgy lehet, ha vagy x osztható 7-tel, vagy x^6-1, mivel 7 törzsszám. Így szétszedve persze csak az állítás második fele érdekes: *ha x 7-tel nem osztható egész szám, akkor x^6-1 mindig osztható 7-tel.*
Fermat[1]) vette észre, hogy ilyen összefüggés minden törzsszámra érvényes. *Ha p egy tetszőleges törzsszámot jelent, a pedig p-vel nem osztható szám, akkor mindig* $p|a^{p-1}-1$. Ennek a tételnek sok egyszerű bizonyítása van. Azok számára, akik ismerik a kéttagúak hatványozására vonatkozó binomiális tételt, ajánlunk is egyet. A tétel minden p-vel nem osztható a-ra vonatkozik. Ezt a kivételt sem kell tennünk, ha a-val megszorozzuk a jobboldali kifejezést: $p|a^p-a$ minden p primszámra és minden a egész számra igaz. Miután most már minden egész a-ra érvényes tételt nyertünk, megpróbálhatjátok teljes indukcióval bizonyítani a tételt. Sikerülni is fog, csak a fellépő együtthatók oszthatóságáról kell még egy egyszerű tényt bebizonyítani.

[1])Pierre de Fermat (1601–1665) francia ügyvéd volt, a toulousi legfőbb bíróság tagja. Szabadidejét legszívesebben matematikával töltötte. Vizsgálatai, melyeket csak fia kezdett kiadni, Fermat halála után 14 évvel, igen sok fontos eredményt tartalmaznak.