A kérdésre a válasz igenlő. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Jelölje A_n a 3^n db csupa 1-es számjeggyel leírt számot.

$n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen $A_1 = 111 = 3 \cdot 37$. Tegyük fel, hogy a 3^k db csupa 1-es számjeggyel leírt szám osztható 3-mal, azaz

$$3^k | \underbrace{11\ldots1}_{3^k db} = A_k$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy akkor a $3^k + 1$ db csupa 1-es számjegyből álló szám osztható $3^k + 1$-nel.

A $3^k + 1$ db 1-esből álló számot kapjuk, ha háromszor egymás után leírunk 3^k db 1-es számjegyet:

$$A_{k+1} = \underbrace{11\ldots1}_{3^k db}\underbrace{11\ldots1}_{3^k db}\underbrace{11\ldots1}_{3^k db}.$$

A helyiértékeket figyelembe véve a kapott szám

$$A_{k+1} = A_k(100^{3^k} + 10^{3^k} + 1).$$

A zárójelben álló szám osztható 3-mal, hiszen a 10-es számrendszerben felírva 3 db 1-es számjegye van, a többi 0, vagyis számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Tehát, ha A_k osztható 3^k-nal, akkor A_{k+1} osztható $3 \cdot 3^k = 3k + 1$-nel.

Zaletnyik Piroska (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések. 1. A feladatban az 1-es számjegynek nincs lényeges szerepe. A bizonyítás ugyanígy elvégezhető pl. csupa 7-es vagy bármely más számjegy esetén.

Kiss Márk (Tiszaújváros, Eötvös József Gimn., I. o. t.)

2. Sokan – helytelenül – arra alapoztak, hogy ha 3^n osztója egy egész szám számjegyei összegének, akkor osztója magának a számnak is. Ez csak $n = 1, 2$ esetén van mindig így. $n = 3$-ra már könnyen találunk ellenpéldát. Például 1989 nem osztható 27-tel, jóllehet számjegyeinek összege 27.