Tekintsük az $y=-\frac{1}{2p}x^2+x$ egyenletű görbét. Ez parabola, amely lefelé nyílik ($p>0$), zérushelyei: $x_1=0,\ x_2=2p$, tengelypontja a $T\left(p;\frac{p}{2}\right)$ pont. Ha az $f(x)$ függvény grafikonját vizsgáljuk, a szóban forgó parabola egy ívét kapjuk. Ennek egyik végpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja, másik végpontja a $P\left(\frac{4}{p};\frac{4p^2-8}{p^3}\right)$ pont.

a) Ha a vizsgált ív a tengelypontot tartalmazza, akkor $f(x)$ legnagyobb értéke nyilván $\frac{p}{2}$. Ez akkor áll fenn, ha $0<p\le\frac{4}{p}$, azaz $0<p\le 2$. Ebben az esetben $f(x)$ nem vehet fel 1-nél nagyobb értéket.

b) Ha $f(x)$ grafikonja a parabola tengelypontját nem tartalmazza, akkor az $f(x)$ függvény növekedő, ezért $x=\frac{4}{p}$-nél veszi fel legnagyobb értékét, amely $\frac{4p^2-8}{p^3}$. Mindez $p>2$ esetén következik be. Nézzük, hogy lehet-e ekkor $\frac{4p^2-8}{p^3}>1$, azaz

$$p^3-4p^2+8<0.$$

Mivel $p=2$ esetén az egyenlőség teljesül, azért a bal oldalon álló harmadfokú polinomnak $p-2$ gyöktényezője. Ezt felhasználva a megoldandó egyenlőtlenség

$$(p-2)(p^2-2p-4)<0.$$

(A szorzattá alakítás egy lehetséges módja a következő: $p^3-4p^2+8=p^3-2p^2-2p^2+8=p^2(p-2)-2(p^2-4)=(p-2)[p^2-2(p+2)]$.)

Most $p>2$, így $p^2-2p-4<0$, vagyis $(p-1)^2<5$. Ennek megoldása $1-\sqrt{5}<p<1+\sqrt{5}$.

Mindezt egybevetve az $f(x)$ függvény pontosan akkor vehet fel 1-nél nagyobb értéket, ha $2<p<1+\sqrt{5}$.

Például $p=3$ esetén $f(x)$ legnagyobb értéke $\frac{28}{27}$, amelyet $x=\frac{4}{3}$-nál vesz fel, de bármely $3-\sqrt{3}$ és $\frac{4}{3}$ közé eső helyen is 1-nél nagyobb $f(x)$ értéke.

Bábosik Gergely (Vác, Ipari Szki. III. o. t.) dolgozata alapján