A feltétel miatt a feladatnak csak $n \geq 2$-re van értelme.
Az $x^2 + a_k x + b_k = 0$ másodfokú egyenletnek akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa $D = a_k^2 - 4b_k \geq 0$.
Tegyük fel, hogy egyik egyenletnek sincs valós gyöke, vagyis mindegyik k-ra $a_k^2 < 4b_k$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 < 4\sum_{k=1}^{n} b_k = a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_na_1.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel:

$$2(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2) < 2(a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots a_na_1).$$

Átalakítva:

$$(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2) + (a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3) + \ldots + (a_n^2 + a_1^2 - 2a_na_1) < 0.$$

Ez azonban lehetetlen, hiszen mindegyik zárójelben két tag különbségének négyzete szerepel, ami nem lehet negatív.
Ellentmondásra jutottunk, vagyis az egyenletek között létezik olyan, amelyiknek van valós gyöke.