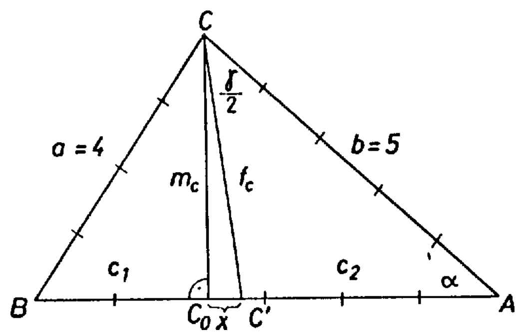
I. megoldás. Az *ábra* jelölései szerint a $\alpha < \beta < \gamma$. Írjuk fel a legkisebb és legnagyobb szögre a koszinusz-tételt:

$$\cos\alpha = \frac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot5\cdot6} = \frac{3}{4},$$

$$\cos\gamma = \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5} = \frac{1}{8}.$$



Azt szeretnénk bizonyítani, hogy $2\alpha = \gamma$. A szögek helyett hasonlítsuk össze a szögek koszinuszait:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{8},$$

s ez valóban egyenlő $\cos\gamma$-val. Mivel hegyesszögekről van szó (mindegyik koszinusz érték pozitív), ezért ebből valóban $2\alpha = \gamma$ következik.

II. megoldás. Legyen az $AB = c = 6$ oldallal szemben fekvő C csúcsból induló f_c szögfelező és m_c magasság talppontja C', illetve C_0, továbbá $C'C_0 = x$. Azt fogjuk elemi úton belátni, hogy az ACC' háromszög egyenlő szárú: $f_c = C'A$, $\alpha = \dfrac{\gamma}{2}$. Mivel $a < b$, ezért C_0 a BC' szakaszon van.

A szögfelező-tétel szerint $c_2 = C'A = \dfrac{b}{a+b}\cdot c = \dfrac{10}{3}$, $c_1 = C'B = \dfrac{a}{a+b}\cdot c = \dfrac{8}{3}$ egység.

A Pitagorasz-tétel alkalmazásával $m_c^2 = a^2 - BC_0^2 = a^2 - (c_1 - x)^2 = f_c^2 - x^2$, azaz $a^2 = f_c^2 + c_1^2 - 2c_1x$, és hasonlóan $b^2 = f_c^2 + c_2^2 + 2c_2x$. Az elsőt c_2-vel, a másodikat c_1-gyel szorozva és összeadva x kiesik:

$$a^2c_2 + b^2c_1 = \left(f_c^2 + c_1c_2\right)(c_1 + c_2), \quad \text{és}$$

$$f_c^2 = \frac{a^2c_2 + b^2c_1}{c} - c_1c_2 = 20 - \frac{80}{9} = \frac{100}{9},$$

tehát valóban $f_c = \dfrac{10}{3} = c_2$.

Megjegyzések **1.** c_1 és c_2 betűs kifejezéseivel ezt a szép összefüggést kapjuk:

$$f_c^2 = ab - c_1c_2.$$

2. Tulajdonképpen az ún. Stewart-tételt alkalmaztuk speciális esetben, amely szerint az AB szakasz tetszőleges D belső pontjára

$$AC^2{\cdot}DB + BC^2{\cdot}DA - DC^2{\cdot}AB = DA{\cdot}DB{\cdot}AB$$

(Függvénytáblázat, 322.3 összefüggés).