Igaz-e, hogy

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{30}{2^{30}}<2? \tag{1}$$

Megoldás. Jelöljük (1) bal oldalán az első n tag összegét S_n-nel, és írjuk fel ennek néhány kezdő értékét a következő alakban:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}=2-\frac{1+2}{2},\\ S_2 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}=2-\frac{2+2}{2^2},\\ S_3 &= \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}=2-\frac{3+2}{2^3},\\ &\vdots \end{aligned}$$

Azt sejtjük, hogy ez általában is igaz, vagyis $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$. Ezt fogjuk a teljes indukció módszerével igazolni.

$n=1$-re állításunk igaz. Be kell látni, hogy a tulajdonság öröklődik, vagyis abból, hogy k-ra igaz, következik $(k+1)$-re is.

$$S_{k+1}=S_k+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{2k+4-k-1}{2^{k+1}}=2-\frac{(k+1)+2}{2^{k+1}}.$$

Ezzel beláttuk, hogy állításunk minden n természetes számra érvényes; speciálisan $S_{30}=2-\frac{32}{2^{31}}$, s ez valóban kisebb 2-nél.

Takács Kornél (Győr, Pattantyús Á. G. Ip. Szki. II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A feladatnak többféle megoldása lehetséges. A megoldók egy része az összeget 30 mértani sorozatra bontotta fel, s ezeket összegezte.

2. Volt, aki a törteket 2-es számrendszerbeli tizedes törtekre írta át, s így végezte az összegzést.

3. Könnyen igazolható az egyenlőtlenségnek egy általánosabb alakja is. Legyenek n és k természetes számok; ekkor

$$\frac{k}{2}+\frac{k+1}{2^2}+\ldots+\frac{k+n}{2^{n+1}}<k+1.$$

Szorozzuk végig az egyenlőtlenséget 2-vel, és a bal oldalon lévő k egészet vonjuk ki; ekkor a jobb oldalon $2(k+1)-k=(k+2)$-t kapjuk. Majd újra 2-vel végigszorozva és $(k+1)$-et kivonva, a jobb oldal $k+3$ lesz. Az eljárást folytatva, az $(n+1)$-edik lépésben a $0<k+n+2$ egyenlőtlenséghez jutunk, és ez nyilvánvalóan igaz. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, eredeti egyenlőtlenségünk is igaz.

Bognár László (Budapest, Móricz Zs. Gimn. III. o. t.) dolgozata alapján