Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$x + 2\sqrt{y} = 2 \tag{1}$$

$$2\sqrt{x} + y = 2. \tag{2}$$

Megoldás. Vonjuk ki (1)-ből (2)-t, és alkalmazzuk az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot az $(x-y)$ különbségre:

$$x - y = 2(\sqrt{y} - \sqrt{x}) = 0,$$
$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 2(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2) = 0.$$

Innen vagy $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$ vagy $\sqrt{x} + \sqrt{y} - 2 = 0$. Az első esetben $\sqrt{y} = \sqrt{x}$-et (1)-be helyettesítve, a $\sqrt{x}$-ben másodfokú

$$x + 2\sqrt{x} = 2$$

egyenlethez jutunk. Mivel $\sqrt{x}$ nemnegativ, azért az egyetlen megoldás:

$$\sqrt{x_1} = -1 + \sqrt{3}, \quad x_1 = (-1 + \sqrt{3})^2 = 4 - 2\sqrt{3}.$$

A második esetben

$$\sqrt{x} = 2 - \sqrt{y},$$

ezt behelyettesítve (2)-be

$$2(2 - \sqrt{y}) + y = 2.$$

Rendezés után $\sqrt{y}$-ra a

$$\sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + 2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk, melynek diszkriminánsa $D = 4 - 8 < 0$, vagyis ennek az egyenletnek nincs megoldása a valós számok körében.

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát

$$x = y = 4 - 2\sqrt{3}.$$

(Helyettesítéssel is ellenőrizhetjük, hogy ez valóban megoldás.)