

I. megoldás. A bizonyítandó állítás a következő alakban is írható:

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}} + \sqrt{8 - \sqrt{60}} = \sqrt{7 + \sqrt{40}} + \sqrt{7 - \sqrt{40}}.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, a két oldalt négyzetre emelve, e lépés megfordítható. Azt kapjuk, hogy

$$8 + \sqrt{60} + 2\sqrt{64 - 60} + 8 - \sqrt{60} = 7 + \sqrt{40} + 2\sqrt{49 - 40} + 7 - \sqrt{40}.$$

Összevonások után $20 = 20$ adódik. Mivel átalakításaink megfordíthatóak, az állítás igaz.

II. megoldás. Négyzetre emelés nélkül is megoldható a feladat, ha észrevesszük, hogy a gyökjelek alatt teljes négyzetek állnak. A bizonyítandó állítás:

$$\sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2},$$

azaz

$$|\sqrt{5} + \sqrt{3}| - |\sqrt{5} + \sqrt{2}| = |\sqrt{5} - \sqrt{2}| - |\sqrt{5} - \sqrt{3}|,$$

vagyis

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2};$$

az állítás tehát igaz.

Buró Szilárd (Bp., Budai Nagy Antal Gimn.)