A gömb köré csak egyféleképpen írható henger, ennek térfogata állandó, mégpedig a gömb sugarával kifejezve $V_1 = 2r^3\pi$.

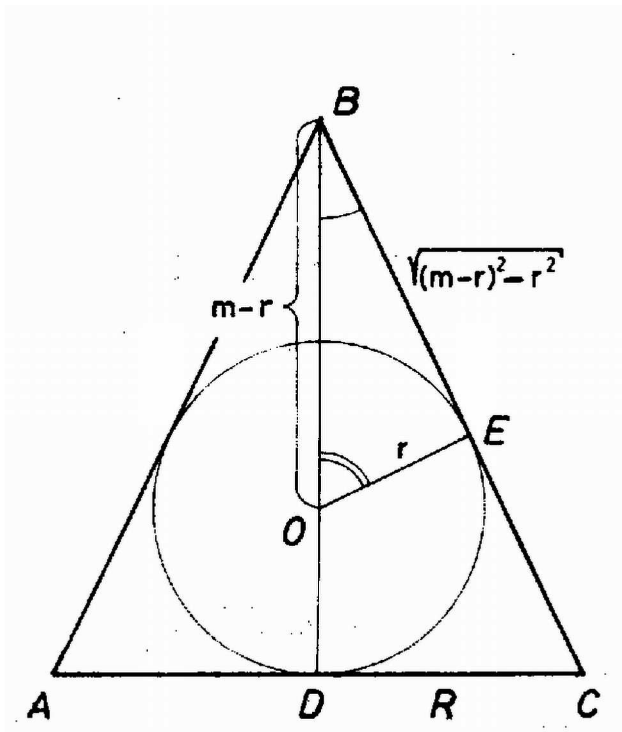
A V_2/V_1 arány így akkor lesz a legkisebb, ha V_2 a legkisebb értéket veszi fel.

A gömb köré írható kúpok közül tehát a legkisebb térfogatút kell meghatározni. Jelöljük a kúp alapkörének sugarát R-rel, magasságát m-mel; így $V_2 = \dfrac{R^2\pi m}{3}$ és

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{R^2\pi m}{3}}{2r^3\pi} = R^2 m \cdot \frac{1}{6r^3}. \tag{1}$$

Mivel $\dfrac{1}{6r^3}$ állandó, csak azt kell megvizsgálnunk, mikor lesz R^2m minimális.

Készítsük el a kúpnak egy, az alapkör középpontján átmenő, az alapsíkra merőleges síkmetszetét.



Az ábra jelöléseit felhasználva az OEB és BDC hasonló háromszögekből

$$\frac{R}{m} = \frac{r}{\sqrt{(m-r)^2 - r^2}}.$$

Négyzetre emelve és rendezve

$$\frac{R^2}{m^2} = \frac{r^2}{m(m-2r)},$$

ahonnan

$$f(m) = R^2 m = \frac{r^2m^2}{m-2r};$$

ennek keressük a minimumát.

Egy deriválható függvénynek az értelmezési tartománya határán, vagy ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0. Esetünkben $m > 2r$, és $m \to 2r$, ill. $m \to \infty$ esetén egyaránt $f(m) \to +\infty$. Másrészt

$$f'(m) = \frac{2r^2(m-2r) - r^2m^2}{(m-2r)^2} = \frac{r^2m^2 - 4r^3m}{(m-2r)^2}.$$

Mivel a nevező pozitív, a tört akkor 0, ha a számlálója 0, azaz

$$r^2m^2 - 4r^3m = r^2m(m-4r) = 0,$$

$r^2m \neq 0$, hiszen r és $m > 0$, ha $m - 4r = 0$, akkor $m = 4r$.

Természetesen azt is meg kell vizsgálni, hogy valóban szélsőérték (sőt minimum) van, pl. úgy, hogy megnézzük, a derivált függvény előjelet vált-e (negatívból pozitívba). Többen írták azt, hogy ahol a derivált 0, ott a függvénynek szélsőértéke van, ami így nem igaz.

Ha tehát $m=4r$, akkor a keresett hányados (1) szerint

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{r(4r)^2}{4r-2r}\cdot\frac{1}{6r^3}=\frac{4}{3}.$$

Kovács Éva (Vác, Friss I. Közg. Szki., III. o. t)
dolgozata alapján

Megjegyzés. A szélsőértéket deriválás nélkül is meg lehet határozni, ha ügyesen választunk változót. Ilyen Bérczes Tamás 8. o. Vésztő, Szabó P. Ált. Isk. dolgozata.