Felhasználva a hatványozás azonosságait, a következő trigonometrikus egyenletet kapjuk:

$$\sin^2 x + 2\cos^2 x + \mathrm{tg} x = 3.$$

A $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\mathrm{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ azonosságok beírásával

$$\sin^2 x + 2 - 2\sin^2 x + \frac{\sin x}{\cos x} = 3,$$

innen

$$\frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \sin^2 x. \tag{1}$$

Emeljük négyzetre az egyenletet és alkalmazzuk újra a négyzetes összefüggést. Kapjuk, hogy

$$\sin^6 x \sin^4 x - 1 = 0; \quad \text{azaz} \quad y = \sin^2 x$$

helyettesítéssel a következő harmadfokú egyenlethez jutunk:

$$y^3 + y^2 - 1 = 0.$$

A megoldók egy része az (1) egyenletet grafikusan oldotta meg: ábrázolták külön-külön a $\mathrm{tg}\, x$ és az $1 + \sin^2 x$ függvényt, és a grafikonról leolvasták a közelítő gyököt.

Néhányan zsebszámológépen iterálással (közelítő módszerrel) határozták meg a szög értékét. Akik pedig ismerték a Cardano-formulát és alkalmazni is tudták, azok ki tudták számítani az x értékét, $x \approx 1{,}0530$ radián, azaz kb. 60°.

Azok a megoldók, akik a fenti módszerek valamelyikével sikeresen határozták meg a gyökök közelítő értékét, megkapták a 2 pontot.

Megjegyzések 1. A Cardano-formula a másodfokú egyenlet megoldóképletéhez hasonló összefüggés. Az általános $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ harmadfokú egyenlet helyettesítéssel $y^3 + py + q = 0$ alakra hozható, ahol p és q az a, b, c, d együtthatókkal a négy alapművelet segítségével kifejezhetők.

Az egyenlet megoldásait az

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

összefüggés adja. Ez az ún. *Cardano-képlet.* (Bővebben olvashatunk róla pl. *Nagy pillanatok a matematika történetében*, Gondolat Kiadó Bp., 1981. c. könyv 58–66 oldalán.)

2. A másodfokú egyenlet megoldását már a görögök is ismerték, a harmad- és negyedfokú egyenletek megoldása csak a XVI században vált ismertté. A harmadfokú egyenlet megoldó képletét *G. Cardano* olasz matematikus közölte 1539-ben megjelent könyvében. A negyedfokú egyenletre először *L. Ferrari* olasz matematikus adott megoldási módszert. Sok matematikus próbálkozott magasabb fokú egyenlet megoldásával, azaz kerestek olyan képletet, amellyel bármely magasabb fokú egyenlet megoldható. Végül *N. H. Abel* norvég matematikus kimutatta, hogy az ötödfokú és annál magasabb fokú általános egyenletre nem létezik ilyen képlet.

3. A feladatba sajnálatos hiba csúszott. Eredetileg a

$$2^{\sin^2 x} \cdot 4^{\cos^2 x} \cdot 2^{\mathrm{tg}^2 x} = 8$$

egyenlet legkisebb gyökét kívántuk meghatározni. Ez a feladat lényegesen egyszerűbb, próbálkozzanak meg vele olvasóink.