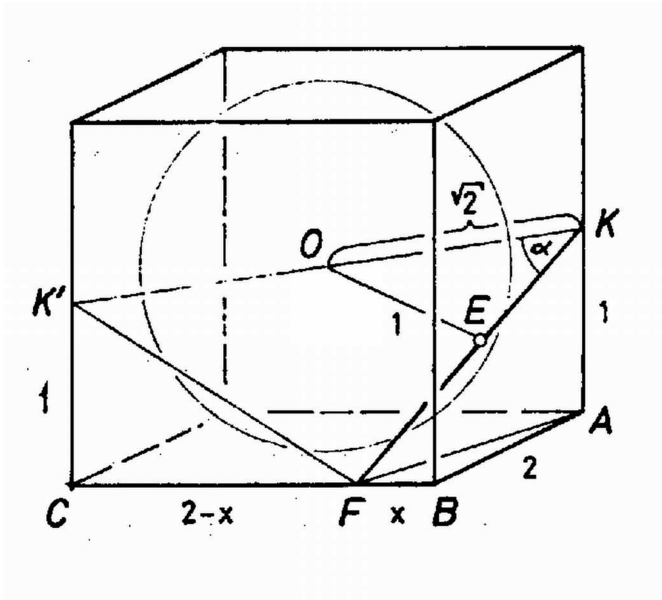
A távolságok arányán nem változtat, ha a kocka élét 2 egységnyinek választjuk. Ekkor a beírt gömb sugara $R = 1$ egység.

Jelöljük a kocka három csúcsát A, B, C,-vel (az ábra szerint), a gömb középpontját O-val. Ha a kockát elmetsszük a K ponton átmenő, alapsíkjával párhuzamos síkkal, a kapott négyzet tartalmazza a gömb középpontját, O-t, és a gömb és a kocka középpontos szimmetriája miatt KK' a négyzet átlója, így hossza $2\sqrt{2}$.



Mivel az érintési pontban húzott sugár mindig merőleges az érintőre, ezért a KOE háromszög derékszögű, így

$$KO = \sqrt{2}, \quad OE = R = 1, \quad \sin OKE\sphericalangle = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

azaz

$$\alpha = 45^\circ, \quad \text{így} \quad KE = 1.$$

Ezután számítsuk ki a KF távolságot; legyen $BF = x$.

Az ABF derékszögű háromszögből

$$AF^2 = x^2 + 2^2,$$

a KAF derékszögű háromszögből pedig

$$KF^2 = AF^2 + AK^2 = x^2 + 2^2 + 1^2 = x^2 + 5.$$

Az FCK' derékszögű háromszögből

$$FK'^2 = (2 - x)^2 + 1^2 = 5 - 4x + x^2.$$

Végül az $FK'K$ háromszögben a koszinusztétel szerint

$$K'F^2 = FK^2 + KK'^2 - 2FK \cdot KK' \cos 45^\circ.$$

Behelyettesítve az előbb kapott értékeket:

$$5 - 4x + x^2 = x^2 + 5 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{x^2 + 5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A műveleteket és összevonásokat elvégezve

$$x + 2 = \sqrt{5 + x^2},$$

négyzetreemelve

$$x = BF = \frac{1}{4}.$$

Innen $KF = \sqrt{x^2+5} = \dfrac{9}{4}$, $EF = \dfrac{5}{4}$, tehát a keresett arányra

$$KE : EF = 1 : \frac{5}{4} = 4 : 5$$

adódik.

Erős Krisztina (Dabas, Táncsics M. Gimn., IV o. t.)
dolgozata alapján