Sokféle, igen érdekes megoldás érkezett. Vázlatosan közöljük ezeket.

Tegyük fel, hogy van ilyen téglatest. Jelölje a, b, c a téglatest éleit. Ekkor az egyenletek

$$4a+4b+4c=48, \tag{1}$$
$$2=2ab+2bc+2ca, \tag{2}$$
$$12=(ab)\cdot c. \tag{3}$$

1. (1)-ből $c=12-(a+b)$-t helyettesítve (2)-be és (3)-ba az

$$1=ab+\big(12-(a+b)\big)(a+b), \tag{2'}$$
$$12=(ab)\big(12-(a+b)\big), \tag{3'}$$

$(a+b)$-re és (ab)-re kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk. Ezt megoldva olyan gyököt kapunk, amely a feladat feltételeit nem elégíti ki. Tehát nincs ilyen téglatest.

2. Tekintsük a fenti egyenletrendszert! Jelöljük az éleket nagyság szerint: $a \leqq b \leqq c$. A feladatból: $0<a,\ b,\ c$, tehát (2)-ben $ab,\ bc,\ ca<1$. Ezért legfeljebb c él lehet nagyobb vagy egyenlő 1-gyel, hiszen ha b és c is nagyobb vagy egyenlő mint 1, akkor $bc \geqq 1$. Így $0<a<b<1<c$ vagy $0<a<b<c<1$. (3)-ból így $0<ab<1$ miatt $c>12$-nek kell teljesülnie. Ez pedig ellentmond (1)-nek. Tehát nem létezik ilyen téglatest.

3. $a,\ b,\ c>0$ miatt alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget $n=3$ esetén.

$$\frac{ab+bc+ca}{3} \geqq \sqrt[3]{(ab)(bc)(ca)}=\sqrt[3]{(abc)^2}.$$

A feladatból az egyenlőtlenség bal oldalán $\frac{1}{3}$, jobb oldalán $\sqrt[3]{144}$ áll, ez ellentmondás.

Megjegyzés: Itt a három feltételből csak kettőt használtunk, sőt az is látszik, hogy milyen „bőkezűen” bántunk az adatokkal.

4. Jelöljük most x_1, x_2, x_3-mal az éleket! Így (1), (2), (3) így alakul:

$$-(x_1+x_2+x_3)=-12 \tag{1''}$$
$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=1 \tag{2''}$$
$$-x_1x_2x_3=-12. \tag{3''}$$

A gyökök – együtthatók közti összefüggés értelmében így az éleket az

$$x^3-12x^2+x-12=0 \tag{4}$$

egyenlet valós gyökei adják. (4)-ben $(x-12)$-t kiemelve a következő egyenletet kapjuk:

$$(x-12)(x^2+1)=0.$$

Mint látjuk, ennek az egyenletnek egy valós és két komplex gyöke van, így a fenti kikötéseknek eleget tevő téglatest nem létezik.

2 pont járt a helyes bizonyításért. Az 1. típusú megoldásnál sokan osztottak ismeretlent tartalmazó tényezővel, de nem vizsgálták meg, hogy az osztó lehet-e nulla. A 2.-nál általában $0<ab<1$ indoklása volt hiányos, ezért 1 pontot adtunk.

Néhányan konkrét eseteket vizsgáltak, csak az egész számokat vették figyelembe. A feladatban azonban nem szerepelt az a kikötés, hogy a téglatest élei egészek. Ezekre a megoldásokra 0 pontot adtunk. Nem kaptak még pontot a nem versenyszerű (osztály nélküli, másolt) dolgozatok.