

A jelenség arra vezethető vissza, hogy a napok deleléstől delelésig számított hossza az év során változik. Budapest a keleti szélesség 19. fokán van, az időzóna közepétől 4 fokkal keletre, ezért a Napnak (téli közép-európai idő szerint) 16 perccel dél előtt, 11 óra 44 perckor kellene delelnie. Az ettől való eltérést megadó összefüggést a csillagászok idő-egyenletnek nevezik. A delelés időpontjából levonva, illetve hozzáadva a nappal hosszának felét megkapjuk a napkelte, illetve a napnyugta időpontját, ezeket hasonlíthatjuk össze a zsebnaptárak adataival.

Először a nappal hosszát számítjuk ki. A napkelte és a napnyugta azzal jellemezhető, hogy a Nap sugarai merőlegesek a Föld középpontjából az adott földrajzi pontba mutató vektorra (1. ábra). Ha a Nap sugarai  $\delta$  szöget zárnak be az Egyenlítő síkjával (vagyis a Nap az Ekliptikán a  $\delta$  szélességi körön jár), akkor a sugarak irányvektora

$$\mathbf{e} = (0, -\cos \delta, -\sin \delta).$$

A  $\theta$  földrajzi szélességi pont helyvektora

$$\mathbf{r} = R(-\cos \theta \sin t, \cos \theta \cos t, \sin \theta),$$

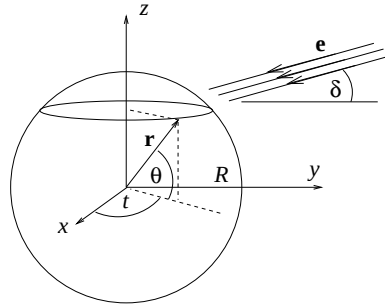
ahol  $t = 360^\circ/24 \text{ óra} \cdot \text{az eltelt idő}$  (valamely kezdeti időponthoz képest). A vektorok merőlegességéből adódik, hogy

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = -R(\cos \theta \cos t \cos \delta + \sin \theta \sin \delta) = 0,$$

amiből

$$(1) \quad \cos t = -\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \delta.$$

Az egyenlet  $t_1$  és  $t_2$  gyökeinek különbsége megadja az adott földrajzi szélességen és az adott napállásnál a nappal hosszát. Például az északi féltekén ( $\theta > 0$ ) nyáron ( $\delta > 0$ )  $t_1 - t_2 > 12 \text{ h}$ . Előfordulhat, hogy az (1) egyenletnek nincs megoldása, mert a jobb oldal értéke nagyobb 1-nél. Ez azt jelenti, hogy az adott földrajzi szélességen a Nap nem megy le, vagy nem kel föl.



A következő feladat az időegyenlet megmagyarázása. Az egyes lexikonokban megtalálható furcsa alakú függvény két hatás együttes eredményeként származtatható: 1. A Föld az ellipszis pályán nem állandó szögsebességgel kering a Nap körül. 2. A Föld tengelyferdesége miatt a Nap látszólagos pályája (az Ekliptika)  $\gamma = 23^\circ 27'$  szöget zár be az Egyenlítővel, és a Nap az Ekliptikán mozog közelítőleg egyenletesen. Mindkét effektus kicsi, ezért hatásukat külön-külön határozzuk meg, majd ezeket összegezzük.

1. A Föld  $T_{\text{cs}} = 23^{\text{h}} 56' 4''$  alatt fordul meg a tengelye körül az állócsillagokhoz képest (csillagnap). Kepler II. törvénye (a perdületmegmaradás) szerint a keringés szögsebessége a Naptól való távolság négyzetével fordítottan arányos. Az átlagos szögsebesség  $\Omega_{\text{átl}} = 2\pi/(365,241 \text{ nap})$ , ezért a Földnek átlagosan  $\alpha_{\text{átl}} = 2\pi/365,241$  szöggel kell déltől dél felé (napi nap) többet fordulnia, mint egy teljes fordulat. Ezért egy napi nap átlagosan  $\Delta T_{\text{átl}} = T_{\text{cs}} \cdot \alpha_{\text{átl}}/(2\pi) = 236 \text{ s}$  időtartammal hosszabb, mint egy csillagnap:  $T_{\text{n}} = T_{\text{cs}} + 236 \text{ s} = 24 \text{ h}$ .

A Nap–Föld távolság  $R_{\text{min}} = 147,1 \cdot 10^6 \text{ km}$  és  $R_{\text{max}} = 152,1 \cdot 10^6 \text{ km}$  között változik, átlagos értéke  $R_{\text{átl}} = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$ . Kepler II. törvényét felhasználva azt kapjuk, hogy a csillagnaptól való legnagyobb, illetve legkisebb eltérés  $\Delta T_{\text{max}} = \Delta T_{\text{átl}} \cdot (R_{\text{átl}}/R_{\text{min}})^2 \approx 228 \text{ s}$ , illetve  $\Delta T_{\text{min}} = \Delta T_{\text{átl}} \cdot (R_{\text{átl}}/R_{\text{max}})^2 \approx 224 \text{ s}$ .

A Föld január 1-én, 2-án van legközelebb a Naphoz, ezért a napi nap ekkor a leghosszabb,  $T_{\text{max}} = 24^{\text{h}} 8''$ , július 3-án van a legtávolabb, ekkor  $T_{\text{min}} = 23^{\text{h}} 59' 52''$ . A pályaeqnyenlet alapján levezethető, hogy a kis excentricitás miatt a napok hossza közelítőleg egy  $A_{\Delta T} \approx 8 \text{ s}$  amplitúdójú koszinusz-függvény szerint változik:

$$T = 24\text{h} + A_{\Delta T} \cdot \cos \frac{2\pi(d-1,5)}{365},$$

ahol  $d$  az év elejétől eltelt napok száma, az 1,5-ös szám pedig a függvény január 1. és 2. közötti maximumából adódik. A kifejezés második tagja a delelés időpontjának egy napra jutó megváltozását adja meg, ezért a delelés időpontja (integrálással):

$$t_D = t_{D0} + \frac{365}{2\pi} \cdot A_{\Delta T} \cdot \sin \frac{2\pi(d-1,5)}{365} \approx 11^{\text{h}} 44' + 7,7' \cdot \sin \frac{2\pi(d-1,5)}{365}.$$

2. A Nap látszólagos mozgását az Ekliptikán közelítőleg egyenletesnek tekinthetjük (most elhanyagoljuk az ellipszispályából adódó kis hatásokat). Az Ekliptika az Egyenlítő síkjával  $23^\circ 27'$  szöget zár be, a Napnak az Egyenlítő mentén mért  $\Phi_{\text{egy}}$  koordinátája nem egyenletesen változik. A 2. ábra alapján

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi_{\text{ekl}} &= \frac{NA}{NO}, & \operatorname{tg} \Phi_{\text{egy}} &= \frac{N'A}{N'O} \\ N'A &= NA \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

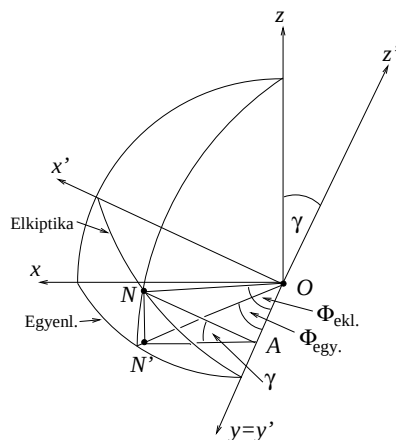
A fentiekből következik, hogy

$$\operatorname{tg} \Phi_{\text{egy}} = \cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \Phi_{\text{ekl}}.$$

Az eltérésből  $\tau = 24^{\text{h}}(\Phi_{\text{ekl}} - \Phi_{\text{egy}})/360^\circ$  időeltolódás adódik. (A Földnek még ennyit kell fordulnia ahhoz, hogy ott deleljen a Nap, ahol delelné akkor, ha az Ekliptika egybeesne az Egyenlítővel.) Meg lehet mutatni, hogy a  $\Phi_{\text{ekl}} - \Phi_{\text{egy}}$  különbség maximális értéke kb.  $2,5^\circ$ . Kihasználva ennek kicsinségét, és azt, hogy  $\cos \gamma$  közel van 1-hez, levezethető, hogy az így adódó időeltolódás jó közelítéssel

$$\tau = 9,8' \cdot \sin \frac{4\pi(d+9)}{365},$$

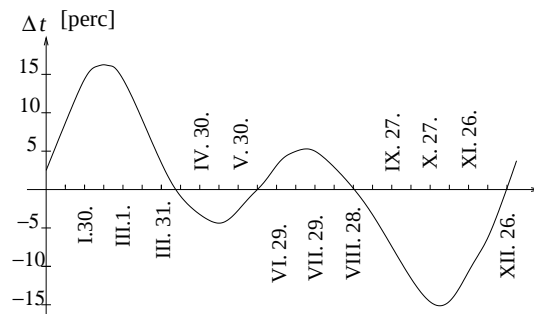
ahol  $d$  ismét az év elejétől eltelt napok száma, a  $+9$  pedig abból adódik, hogy a függvény december 22-én, a téli napfordulókör (és a nyári napfordulónál, meg a napéjegyenlőségek idején) veszi fel a nulla értéket. (Ekkor ugyanis  $\Phi_{\text{ekl}} = \Phi_{\text{egy}}$ .)



A delelés időpontját tehát (közelítőleg) a

$$(2) \quad t_D = 11^{\text{h}} 44' + 7,7' \cdot \sin \frac{2\pi(d-1,5)}{365} + 9,8' \cdot \sin \frac{4\pi(d+9)}{365} = 11^{\text{h}} 44' + \Delta t$$

függvény adja meg. A napkeltenek és a napnyugtának a *deleléshez viszonyítva* egyszerre van szélsőértéke, nevezetesen december 22-én és június 22-én. A napkelte és a napnyugta *valódi ideje* viszont az időegyenlet miatt már nem ugyanakkor veszi fel szélsőértékét. Az időegyenletet a 3. ábra, a napkelte és napnyugta téli szélsőértékeit a 4. ábra mutatja.



Megjegyezzük még, hogy a nappal hosszát a fentiekén kívül a légkör optikai hatása is befolyásolja (például március 21-én, a „napéjegyenlőségkor” a nappal kb.  $12^{\text{h}} 10'$  hosszú).

G. L. és V. P.

